



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

TEORIA DEL GRADO E APPLICAZIONI

Relatore
Prof. Andrea Loi

Tesi di Laurea di
Michela Zedda

ANNO ACCADEMICO 2005/2006

Introduzione

Data un'applicazione liscia $f: X \rightarrow Y$, con X e Y varietà senza bordo, della stessa dimensione e delle quali X compatta e Y connessa, si definisce *grado modulo 2* di f , $\deg_2(f)$, il numero dei punti modulo 2 della preimmagine di un valore regolare $y \in Y$. Questa definizione ha senso in quanto il numero di punti in questione per la scelta di X e Y è finito ed è lo stesso per ogni valore regolare. Se le varietà considerate sono anche orientate ad ogni punto resta assegnato un numero di orientazione ± 1 e si definisce *grado* di f , $\deg(f)$, come la somma dei numeri di orientazione dei punti della preimmagine di un valore regolare. La proprietà fondamentale del grado di un'applicazione, sia esso modulo 2 o orientato, è di essere un invariante omotopico. Più precisamente se $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ sono due mappe omotope, ossia esiste $F: X \times I \rightarrow Y$ liscia tale che $F(x, 0) = f_0(x)$ e $F(x, 1) = f_1(x)$, allora $\deg_2(f_0) = \deg_2(f_1)$ ($\deg(f_0) = \deg(f_1)$ se X e Y sono orientate).

È possibile estendere la definizione di grado ad applicazioni continue. Infatti data un'applicazione continua $g: X \rightarrow Y$ si può definire il $\deg(g)$ come il grado di una qualunque applicazione liscia $f: X \rightarrow Y$ omotopa a g (si veda il Teorema 1.38 e il Corollario 1.40 per la dimostrazione dell'esistenza di una tale f e dell'indipendenza della f scelta).

In questa tesi abbiamo studiato nel dettaglio due teoremi, il Teorema di Borsuk-Ulam e il Teorema di Hopf.

Teorema A (Borsuk-Ulam). Per ogni applicazione continua $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ esiste $x \in \mathbb{S}^n$ tale che $f(x) = f(-x)$.

Teorema B (Hopf). Sia X una varietà compatta, connessa e orientata. Date due applicazioni continue $f_0, f_1: X \rightarrow \mathbb{S}^n$ se $\deg(f_0) \neq \deg(f_1)$ allora f_0 è omotopa a f_1 .

Classicamente il Teorema di Borsuk-Ulam e quello di Hopf vengono dimostrati utilizzando tecniche di topologia algebrica quali l'omologia. D'altra parte la topologia differenziale ci fornisce una dimostrazione dei due teoremi in questione nel caso differenziabile. Gli enunciati in questo caso sono i seguenti:

Teorema A' (Borsuk-Ulam). Per ogni applicazione liscia $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ esiste $x \in \mathbb{S}^n$ tale che $f(x) = f(-x)$.

Teorema B' (Hopf). Sia X una varietà compatta, connessa e orientata. Date due applicazioni lisce $f_0, f_1: X \rightarrow \mathbb{S}^n$ se $\deg(f_0) = \deg(f_1)$ allora f_0 è omotopa a f_1 tramite un'omotopia liscia.

In questa tesi viene fornita una dimostrazione, indipendente dalla teoria dell'omologia, dei teoremi A e B facendo uso dei teoremi A' e B' e di opportune tecniche di approssimazione di funzioni continue (vedi Capitolo 3 e Capitolo 4). L'idea della dimostrazione segue la falsariga di quella del Teorema del punto fisso di Brouwer fornita da Hirsch, dove il Teorema di approssimazione di Weierstrass consente di dimostrare l'esistenza di un punto fisso per un'applicazione continua $g: B^n \rightarrow B^n$ (B^n palla unitaria in \mathbb{R}^n), una volta provata l'esistenza di un tale punto per un'applicazione liscia $f: B^n \rightarrow B^n$. Viene inoltre riportata un'ingegnosa dimostrazione di F. E. Su (vedi [5]) del Teorema di Brouwer usando il Teorema A.

Questa tesi si compone di quattro capitoli organizzati come segue. Nel primo capitolo sono esposte brevemente alcune delle nozioni fondamentali della topologia differenziale, a partire da quella di varietà differenziabile fino a concetti più complessi come la trasversalità e l'omotopia. Inoltre daremo una dimostrazione del Teorema del punto fisso di Brouwer, che nel Capitolo 3 proveremo essere una conseguenza del Teorema di Borsuk-Ulam.

Nel secondo capitolo esponiamo i fondamenti della teoria del grado. Nei primi tre paragrafi definiamo il numero d'intersezione, il grado e il numero di avvolgimento modulo 2 di un'applicazione descrivendone le proprietà fondamentali, nei paragrafi successivi introduciamo le varietà orientate, definiamo l'orientazione del bordo e della preimmagine e infine parliamo di grado di un'applicazione tra varietà orientate.

Il Capitolo 3 e il Capitolo 4 sono il cuore della tesi e contengono le dimostrazioni dei teoremi A' e B' e da questi, tramite tecniche di approssimazione quelle dei teoremi A e B.

Indice

1	Nozioni preliminari.	1
1.1	Varietà differenziabili.	1
1.2	Partizione dell'unità.	6
1.3	Trasversalità e omotopia	9
1.4	Il Teorema del Punto Fisso di Brouwer.	17
2	Teoria del grado.	21
2.1	Numero d'intersezione modulo 2	21
2.2	Grado di un'applicazione modulo 2.	23
2.3	Numero di avvolgimento.	25
2.4	Varietà orientabili: definizione e proprietà.	27
2.5	L'orientazione del bordo.	29
2.6	L'orientazione della preimmagine	30
2.7	Teoria del grado e numero di avvolgimento.	32
3	Il Teorema di Borsuk-Ulam.	37
3.1	I vari enunciati (nel caso continuo).	37
3.2	Dimostrazione del Teorema di Borsuk-Ulam: il caso liscio. . .	39
3.3	Dimostrazione del Teorema di Borsuk-Ulam: il caso continuo. .	43
3.4	Alcuni corollari	44
3.5	Dal Borsuk-Ulam al punto fisso di Brouwer.	45
4	Il Teorema di Hopf.	49
4.1	Lemma d'Isotopia e lemmi di estensione.	49
4.2	Caso liscio e a grado zero.	51
4.3	Dimostrazione del Teorema di Hopf.	53

Capitolo 1

Nozioni preliminari.

Il riferimento per questo capitolo è il [3], le dimostrazioni dettagliate verranno fatte solamente nel caso in cui nel libro siano lasciate come esercizio, altrimenti verranno solo accennate e verranno forniti i dati bibliografici.

1.1 Varietà differenziabili.

Il concetto di varietà differenziabile si basa su quello di applicazione liscia. Se siamo in uno spazio euclideo, un'applicazione è detta liscia se è di classe C^∞ . Più precisamente, un'applicazione f da un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ in \mathbb{R}^m è liscia se è di classe C^∞ . Se al posto di un aperto abbiamo un generico sottoinsieme X di \mathbb{R}^n , diciamo che $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ è liscia se per ogni $x \in X$ esiste un intorno $V \subset \mathbb{R}^n$ e una funzione liscia $f: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ che estende la f , ovvero $F|_X = f$.

Una classe di applicazioni lisce di particolare importanza è quella dei diffeomorfismi, che definiamo come segue:

Definizione 1.1. *Un'applicazione liscia $f: X \rightarrow Y$, con $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$, è un diffeomorfismo locale in $x \in X$ se esiste un intorno U di x tale che $f|_U: U \rightarrow f(U)$ sia iniettiva con inversa liscia. Se tale proprietà vale per tutti i punti di X , f è un diffeomorfismo tra X e Y , che vengono detti diffeomorfi.*

Possiamo ora introdurre il concetto di varietà:

Definizione 1.2. *Un sottoinsieme X di \mathbb{R}^n è una varietà k -dimensionale se è localmente diffeomorfa ad \mathbb{R}^k .*

In altre parole, X è una varietà k -dimensionale se per ogni $x \in X$ esistono un intorno V e un diffeomorfismo f che porta V su un aperto $U \subset \mathbb{R}^k$. Un tale diffeomorfismo $\phi: U \rightarrow V$ si chiama parametrizzazione locale dell'intorno V .

Passiamo ora a parlare di differenziale di un'applicazione liscia, che ci servirà poi ad introdurre un altro dei concetti basilari della topologia differenziale, quello di spazio tangente.

Definizione 1.3. Siano $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ un'applicazione liscia, $x \in U$ e h un arbitrario vettore di \mathbb{R}^n . Si definisce la derivata di f nella direzione h calcolata nel punto x , il limite

$$df_x(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}.$$

Il df_x è una applicazione lineare definita su tutto \mathbb{R}^n e come tale può essere espressa in forma matriciale. Se scriviamo la f come $f(y) = (f_1(y), \dots, f_m(y))$ questa matrice è la matrice jacobiana di f calcolata in x , ovvero

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Definizione 1.4. Sia X una varietà di \mathbb{R}^n e $\phi: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow X$ una sua parametrizzazione locale, con $x = \phi(0)$, si definisce spazio tangente $T_x X$ ad X nel punto x l'immagine dell'applicazione $d\phi_0: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Per come è definito, lo spazio tangente $T_x X$ traslato sul punto x è la migliore approssimazione euclidea di X in x . La dimensione dello spazio tangente è uguale alla dimensione di X .

Per generalizzare la definizione di differenziale ad una applicazione liscia $f: X \rightarrow Y$ tra varietà, utilizziamo proprio la nozione di spazio tangente.

Definizione 1.5. Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione liscia tra varietà e siano $\phi: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow X$, $\psi: V \subset \mathbb{R}^l \rightarrow Y$ due parametrizzazioni di X e di Y rispettivamente, con $\phi(0) = x$ e $\psi(0) = f(x) = y$. Il differenziale di f calcolato in x è

$$df_x = d\psi_0 \circ dh_0 \circ d\phi_0^{-1},$$

dove $dh_0: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$ è il differenziale di $h = \psi^{-1} \circ f \circ \phi$.

Teorema 1.6 (Regola della Catena). *Se $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ sono applicazioni lisce tra varietà, allora*

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x.$$

Dimostrazione. Date $\phi: U \rightarrow X$ parametrizzazione locale di un intorno di $x \in X$, $\psi: V \rightarrow Y$ di un intorno di $y \in Y$ e $\eta: W \rightarrow Z$ di un intorno di $z \in Z$, consideriamo le applicazioni $h: U \rightarrow V$, $h = \psi^{-1} \circ f \circ \phi$, e $j: V \rightarrow W$, $j = \eta^{-1} \circ g \circ \psi$. Per definizione di differenziale abbiamo

$$d(g \circ f)_x = d\eta_0 \circ d(j \circ h)_0 \circ d\phi_0^{-1}.$$

Poiché per la regola della catena valida per mappe tra sottoinsiemi aperti di spazi Euclidei si ha

$$d(j \circ h)_0 = (dj)_0 \circ (dh)_0,$$

otteniamo

$$d(g \circ f)_x = (d\eta_0 \circ dj_0 \circ d\psi_0^{-1}) \circ (d\psi_0 \circ dh_0 \circ d\phi_0^{-1}) = dg_y \circ df_x.$$

□

Teorema 1.7 (Teorema della funzione inversa). *Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione liscia tra due varietà della stessa dimensione. Se il differenziale df_x calcolato in x è un isomorfismo allora f è un diffeomorfismo locale.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione si rimanda a [9].

□

Definizione 1.8. $f: X \rightarrow Y$ è un'immersione (in $x \in X$) se il differenziale

$$df_x: T_x(X) \rightarrow T_{f(x)}(Y)$$

è iniettivo per ogni $x \in X$, ed è una submersione (in x) se esso è suriettivo per ogni $x \in X$.

Chiaramente se f è un'immersione $\dim X \leq \dim Y$, e se f è una suriezione $\dim X \geq \dim Y$.

Dal Teorema 1.7 segue che (vedi [3] pp. 20-21 per i dettagli):

Teorema 1.9. *Sia $f: X \rightarrow Y$ un'immersione (rispettivamente una suriezione) in $x \in X$, con $\dim X = k$, $\dim Y = l$. Allora esistono coordinate locali (x_1, \dots, x_k) intorno a x e (x_1, \dots, x_l) intorno a $f(x)$ tali che $f(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ (rispettivamente $f(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_l)$).*

Definizione 1.10. Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione liscia tra due varietà. Un punto $y \in Y$ è un valore regolare per f se $df_x: T_x(X) \rightarrow T_y(Y)$ è suriettiva in ogni punto x tale che $f(x) = y$. I punti di Y che non soddisfano questa condizione sono chiamati valori critici.

Teorema 1.11 (Teorema della funzione implicita). Se y è un valore regolare di $f: X \rightarrow Y$, allora l'insieme dei valori che soddisfano la $f(x) = y$ è una sottovarietà di X , di dimensione $\dim X - \dim Y$.

Dimostrazione. Sia $x \in f^{-1}(y)$, allora df_x è un'applicazione suriettiva o in altre parole f è una submersione nel punto x . Per il Teorema 1.9 esistono dei sistemi di coordinate locali centrate nell'origine attorno a x e y tali che

$$f(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_l),$$

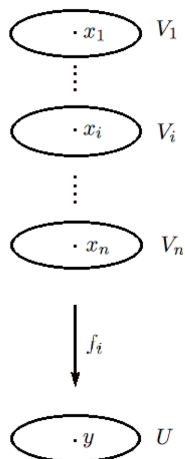
dove k e l sono le dimensioni di X e Y rispettivamente, ($k \geq l$). Denotiamo con V l'intorno di x in cui abbiamo definito tale sistema di coordinate locali. Le funzioni (x_{l+1}, \dots, x_k) formano un sistema di coordinate sull'insieme $f^{-1}(y) \cap V$, che è un aperto di $f^{-1}(y)$. Inoltre si vede subito che la dimensione di $f^{-1}(y)$ è $k - l$ ovvero $\dim X - \dim Y$. \square

È importante notare che se $\dim X > \dim Y$ dire che y è un valore regolare per la f equivale a dire che la f è una submersione in ogni punto appartenente a $f^{-1}(y)$. Se invece $\dim X < \dim Y$ ogni punto di $f(X)$ è un valore critico per la f , mentre sono valori regolari quelli che non appartengono all'immagine.

Teorema 1.12. Sia y un valore regolare per $f: X \rightarrow Y$, dove X è compatta e della stessa dimensione di Y . Allora $f^{-1}(y)$ è un insieme finito di punti $\{x_1, \dots, x_n\}$ ed esiste un intorno U di $y \in Y$ tale che $f^{-1}(U)$ è unione disgiunta V_1, \dots, V_n dove V_i è un intorno di x_i e f porta ogni V_i diffeomorficamente in U .

Dimostrazione. Dal Teorema della funzione inversa 1.7 se y è un valore regolare per f allora $f^{-1}(y)$ è una varietà di dimensione $\dim X - \dim Y = 0$. Dunque $f^{-1}(y)$ è un insieme di punti isolati ed è inoltre finito, in quanto se non lo fosse per compattezza di X sarebbe possibile estrarre una sottosuccessione convergente in X e allora gli intorni in $f^{-1}(y)$ non sarebbero diffeomorfi a quelli in y .

Sia dunque $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$, prendiamo degli intorni U_i degli x_i ,



$i = 1, \dots, n$, a due a due disgiunti diffeomorfi agli aperti $f(U_i)$ (tali intorno esistono in quanto f è un diffeomorfismo locale).

Consideriamo l'aperto

$$V' = \bigcap_{i=1}^n f(U_i).$$

Poiché f non è un diffeomorfismo globale, potrebbe accadere per qualche $z \in V'$ che $f^{-1}(z) \notin U_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Modifico allora l'aperto in modo tale da escludere l'insieme dei punti per cui questo accade, $V = V' \setminus f(X \setminus U_i)$. V è l'aperto cercato, e ho

$$f^{-1}(V) \cap U_i = V_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{e} \quad f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^n V_i,$$

come richiesto. □

Abbiamo visto finora tutte le proprietà di cui godono i valori regolari di un'applicazione liscia, potrebbe venire allora il dubbio che sia raro trovarne qualcuno. Il seguente teorema afferma esattamente il contrario.

Teorema 1.13 (Teorema di Sard). *Se $f: X \rightarrow Y$ è una qualunque applicazione liscia tra varietà allora quasi tutti i punti di Y sono valori regolari per la f .*¹

Dimostrazione. Per la dimostrazione vedere ad esempio [4]. □

¹Equivale a dire che i valori critici della f costituiscono un insieme di misura nulla su Y , dove con "misura nulla" si intende che si può ricoprire con un insieme numerabile di solidi rettangolari, il cui volume totale può essere reso piccolo a piacere.

Passiamo ora a parlare di varietà con bordo. Nelle seguenti definizioni si denota con \mathbb{H}^k il sottospazio di \mathbb{R}^k composto da tutti i punti che hanno l'ultima coordinata non negativa.

Definizione 1.14. *Un sottoinsieme $X \subset \mathbb{R}^n$ è una varietà k -dimensionale con bordo se per ogni suo punto esiste un intorno diffeomorfo ad un aperto di \mathbb{H}^k . il bordo ∂X consiste in quei punti che appartengono all'immagine del bordo di \mathbb{H}^k attraverso una qualche parametrizzazione. Il suo complementare è chiamato interno di X e denotato con $\text{Int}(X)$.*

Teorema 1.15. *Se X è una varietà k -dimensionale con bordo, allora ∂X è una varietà $(k - 1)$ -dimensionale senza bordo.*

Dimostrazione. Per dimostrare il teorema è sufficiente far vedere che preso un qualunque sistema ϕ di coordinate locali in X , $\phi(\partial\mathbb{H}^k) = \partial X$. Siano U e V due aperti di \mathbb{H}^k e di X rispettivamente, vogliamo dimostrare che $\phi(\partial U) = \partial V$. Sia $x \in \partial V$, poiché per definizione $\partial X = X \cap \partial\mathbb{H}^k$, abbiamo subito $\phi(\partial U) \subset V$. Sia W un aperto di \mathbb{H}^k e ψ una parametrizzazione locale che porta W in V . Dobbiamo dimostrare che $\psi(\partial W) \subset \phi(\partial U)$, ovvero che $\phi^{-1} \circ \psi(\partial W) \subset \partial U$. Supponiamo per assurdo che esista $w \in \partial W$ tale che $\phi^{-1} \circ \psi(w) \in \text{Int}(U)$ possiamo allora prendere un intorno di $\phi^{-1} \circ \psi(w)$ che sia un aperto U' di \mathbb{R}^k , per il Teorema della funzione inversa 1.7 avremo allora che anche $\phi \circ \psi^{-1}(U')$ che contiene w è un aperto di \mathbb{R}^k , in contraddizione col fatto che $w \in \partial W$. \square

Definizione 1.16. *Date una varietà con bordo X e una sua parametrizzazione locale $\phi: U \rightarrow X$ con $\phi(0) = x \in \partial X$ e $U \subset \mathbb{H}^k$, definiamo semispazio superiore $H_x(X)$ di X l'immagine di \mathbb{H}^k tramite il differenziale $d\phi_0$.*

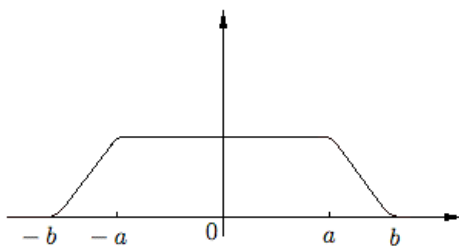
Non è difficile vedere che questa definizione è ben posta in quanto si può dimostrare che $H_x(X)$ non dipende dalla scelta della parametrizzazione locale.

1.2 Partizione dell'unità.

Lemma 1.17. *Esiste una funzione $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ liscia tale che*

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \in D_a(0) \\ 0 & \text{fuori da } D_b(0), \end{cases}$$

dove $D_r(c)$ è la palla chiusa di centro c e raggio r .



Dimostrazione. Consideriamo dapprima il caso $k = 1$ e supponiamo che $0 < a < b$. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x \leq 0, \end{cases}$$

e definiamo $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = f(x-a)f(b-x)$. Sia ora $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x) = \frac{\int_{-\infty}^x \tilde{f}(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) dt},$$

per come è definita essa è liscia e si ha $h(x) = 0$ per $x < a$, $h(x) = -1$ per $x > b$. La funzione cercata può essere allora definita come $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 1 - h(|x|)$. Per $k > 1$ basta porre al posto di $|x|$ la norma euclidea $\|x\|$. \square

Definizione 1.18. Data una funzione $f: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, definiamo il supporto di f come

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in U \mid f(x) \neq 0\}},$$

ovvero $U \setminus \text{supp}(f)$ è il più grande aperto in cui f si annulla.

Definizione 1.19. Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ e sia U_α un suo ricoprimento aperto. Si definisce partizione dell'unità subordinata al ricoprimento U_α una successione di funzioni lisce $\theta_j: X \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfi alle seguenti condizioni

1. $0 \leq \theta_j \leq 1, \quad \forall j$;
2. Per ogni $x \in X$ esiste U_x tale che solo un numero finito di θ_j si annulli in esso;
3. $\sum_{j=1}^{\infty} \theta_j(x) = 1^2$.

²Questa somma ha senso per il punto precedente.

4. Per ogni j , $\text{supp}(\theta_j) \subset U_\alpha$, per qualche α .

Lemma 1.20. *Dato un aperto $W \subset \mathbb{R}^n$ esiste una successione di compatti K_j tali che*

1. $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = W$,
2. $K_j \subset \text{Int}(K_{j+1})$.

Dimostrazione. Definendo

$$K_j = \left\{ w \in W \mid \|w\| \leq j, d(w, \mathbb{R}^n \setminus W) \geq \frac{1}{j} \right\},$$

dove $d(w, \mathbb{R}^n \setminus W)$ è la distanza del punto w dal chiuso $\mathbb{R}^n \setminus W$, avremo

$$K_j \subset \text{Int}(K_{j+1}) = \left\{ w \in W \mid \|w\| < j, d(w, \mathbb{R}^n \setminus W) > \frac{1}{j} \right\};$$

$K_j \subset W$, per ogni j .

Resta quindi da dimostrare che $W \subset \bigcup_j K_j$.

Poiché W è aperto, per ogni $w \in W$ esiste un intorno tutto contenuto in W .

Definiamo

$$C_j = \left\{ w \in W \mid d(w, \mathbb{R}^n \setminus W) \geq \frac{1}{j} \right\},$$

e sia λ la distanza dell'intorno di w da $\mathbb{R}^n \setminus W$. Per $j > \frac{1}{\lambda} + \epsilon$ con ϵ raggio dell'intorno, si ricava $w \in C_j$ e $D_j \subset W$. Come richiesto abbiamo dunque che per ogni $w \in W$ esiste j tale che $w \in K_j$. \square

Teorema 1.21. *Dati $X \subset \mathbb{R}^n$ e U_α un suo ricoprimento aperto, esiste una partizione dell'unità subordinata a questo ricoprimento.*

Dimostrazione. Dimostriamo prima il teorema per $W = \bigcup_\alpha W_\alpha$, con W_α aperto di \mathbb{R}^n tale che $U_\alpha = W_\alpha \cap X$, poi restringiamo le funzioni trovate a $X \subset \mathbb{R}^n$.

Prendiamo una successione di compatti K_j con le proprietà descritte nel lemma precedente e consideriamo il ricoprimento di W costituito da palle la cui chiusura è contenuta in qualche W_α . Poiché K_2 è compatto posso estrarre un suo sottoricoprimento finito da quello di W , costituito da r palle. Considero r funzioni lisce f_1, \dots, f_r tali che per ogni $j = 1 \dots, r$, se D_j è la j -esima palla con raggio ϵ_j e centro x_j

$$f_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in D_{\epsilon_j}(x_j), \\ 0 & \text{per } x \text{ fuori da } D_{2\epsilon_j}(x_j), \end{cases} \quad (1.1)$$

l'esistenza delle quali è garantita per il Lemma 1.17. Considero ora il compatto $K_3 \setminus \text{Int}(K_2)$ e il ricoprimento di $W \setminus K_1$ costituito da palle la cui chiusura sta in $W \setminus K_1$ e in qualche W_α . Poiché $K_3 \setminus \text{Int}(K_2)$ è compatto posso estrarre da questo un sottoricoprimento finito. Di nuovo posso costruire un numero finito di funzioni come quelle descritte sopra. Con questo metodo possiamo quindi costruire un ricoprimento $D_{\epsilon_j}(x_j)$ di W e una successione di funzioni lisce ρ_j tali che per ogni j fissato ρ_j sia nulla al di fuori di $D_{2\epsilon_j}$. Normalizzando otteniamo le funzioni cercate:

$$\theta_j = \frac{\rho_j}{\sum_{j=1}^{\infty} \rho_j},$$

dove la somma è ben definita in quanto solo un numero finito di ρ_j è diverso da 0 e ne esiste sempre una non nulla. \square

1.3 Trasversalità e omotopia

Definizione 1.22. *Un'applicazione $f : X \rightarrow Y$ si dice trasversale alla sottovarietà $Z \subset Y$, e si scrive $f \pitchfork Z$, se*

$$\text{Im}(df_x) + T_y(Z) = T_y(Y) \quad \forall x \in f^{-1}(y).$$

Si può notare che la nozione di trasversalità generalizza quella di valore regolare nel caso $Y = \{y\}$.

Teorema 1.23. *Data una qualunque applicazione liscia $f : X \rightarrow Y$ trasversale a $Z \subset Y$, $f^{-1}(Z)$ è una sottovarietà di X la cui codimensione in X è pari alla codimensione di Z in Y .*

Dimostrazione. Ripetendo le considerazioni fatte nel Teorema della funzione implicita 1.11, se Z è costituita da un singolo punto y , $y = f(x)$, possiamo definire Z in un intorno di y come soluzione di un sistema di l equazioni indipendenti

$$g_1 = \cdots = g_l = 0,$$

dove l è la codimensione di Z in Y . In un intorno di x potremo allora scrivere $f^{-1}(Z)$ come soluzione del sistema

$$g_1 \circ f = \cdots = g_l \circ f = 0.$$

Se indichiamo con g la submersione (g_1, \dots, g_l) possiamo affermare che $(g \circ f)^{-1}(0)$ è una varietà a patto che 0 sia un valore regolare, resta quindi da dimostrare che $d(g \circ f)_x: T_x(X) \rightarrow \mathbb{R}^l$ è suriettiva. Poiché abbiamo

$$d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x,$$

$d(g \circ f)_x$ è suriettiva se e solo se $dg_y(df_x)(T_x X) = \mathbb{R}^l$. Poiché

$$dg_y: T_y(Y) \rightarrow \mathbb{R}^l$$

è un'applicazione suriettiva con nucleo $T_y(Z)$, affinché $dg_y(df_x)(T_x X) = \mathbb{R}^l$, $df_x(T_x(X))$ insieme con $T_y(Z)$ devono generare tutto $T_y(Y)$. Poiché inoltre $f^{-1}(Z)$ viene definita come insieme delle soluzioni di l equazioni, la sua codimensione in X , sarà proprio l , come quella di Z in Y . \square

Vediamo ora un lemma di algebra lineare necessario alla dimostrazione dei teoremi successivi.

Lemma 1.24. *Sia $T: U \rightarrow V$ un'applicazione lineare tra spazi euclidei e sia $W \subset V$. Allora*

$$T \pitchfork W \iff \frac{U}{T^{-1}(W)} \simeq \frac{V}{W}.$$

Dimostrazione. L'isomorfismo cercato è

$$\tilde{T}: \frac{U}{T^{-1}(W)} \rightarrow \frac{V}{W},$$

definito da $\tilde{T}([u]) = [T(u)]$. È ben definito in quanto se $u_1 = u + w \in T^{-1}(W)$,

$$[T(u_1)] = T(u + w) = [T(u) + W].$$

È iniettivo, in quanto $[T(u)] = 0$ quando $T(u) = w \in W$ e dunque $u \in T^{-1}(W)$, ed è suriettivo, infatti preso $[v] \in \frac{V}{W}$ se $T \pitchfork W$ si può scrivere come $T(u) + w$ con $u \in U$ e $w \in W$, e sarà immagine di $[u]$, in quanto

$$\tilde{T}([u]) = [T(u)] = [v - w] = [v].$$

Viceversa l'esistenza di tale isomorfismo implica la trasversalità di T rispetto a W . \square

Teorema 1.25. *Sia $f: X \rightarrow Y$ trasversale a una sottovarietà Z di Y . Allora*

$$T_x(f^{-1}(Z)) = df_x^{-1}(T_{f(x)}(Z))$$

con $df_x: T_x(X) \rightarrow T_{f(x)}(Y)$ differenziale di f nel punto x .

Dimostrazione. Sia $y = f(x)$. Per il lemma precedente abbiamo

$$f \pitchfork Z \iff \frac{T_x X}{df_x^{-1}(T_y Z)} \simeq \frac{T_y Y}{T_y Z},$$

da cui, poiché $T_x(f^{-1}(Z)) \subset df_x^{-1}(T_y Z)$, abbiamo $df_x(T_x f^{-1}(Z)) \subset T_y Z$. Se ora si dimostra che hanno la stessa dimensione, si dimostra che sono lo stesso spazio. Ma infatti per il Teorema 1.23 risulta:

$$\begin{aligned} \dim X - \dim(df_x^{-1}(T_y Z)) &= \dim Y - \dim Z, \\ \dim X - \dim(f^{-1}(Z)) &= \dim Y - \dim Z, \end{aligned}$$

e dunque $\dim(df_x^{-1}(T_y Z)) = \dim(f^{-1}(Z))$. \square

Teorema 1.26. *Sia $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ una sequenza di applicazioni lisce tra varietà, e sia g trasversale a una sottovarietà W di Z . Allora $f \pitchfork g^{-1}(W)$ se e solo se $g \circ f \pitchfork W$.*

Dimostrazione. Per il Lemma 1.24 abbiamo:

$$\begin{aligned} g \pitchfork W &\iff \frac{T_y Y}{dg_y^{-1}(T_z W)} \simeq \frac{T_w Z}{T_w W}, \\ g \circ f \pitchfork W &\iff \frac{T_x X}{d(g \circ f)_x^{-1}(T_z W)} \simeq \frac{T_w Z}{T_w W}, \\ f \pitchfork g^{-1}(W) &\iff \frac{T_x X}{df_x^{-1}(T_y(g^{-1}(W)))} \simeq \frac{T_y Y}{T_y(g^{-1}(W))}, \end{aligned}$$

per cui dobbiamo dimostrare che

$$T_y(g^{-1}(W)) = dg_y^{-1}(T_z(W)) \iff df_x^{-1}(T_y(g^{-1}(W))) = d(g \circ f)_x^{-1}(T_z W),$$

ma infatti per quanto detto sopra si ha successivamente:

$$\begin{aligned} df_x^{-1}(T_y(g^{-1}(W))) &= d(g \circ f)_x^{-1}(T_z W) \Rightarrow \\ T_y(g^{-1}(W)) &= df \circ d(g \circ f)_x^{-1}(T_z W) = dg_y^{-1}(T_z W); \\ T_y(g^{-1}(W)) &= dg_y^{-1}(T_z(W)) \Rightarrow \\ df_x^{-1}(T_y(g^{-1}(W))) &= df_x^{-1} \circ dg_y^{-1}(T_z W) = df_x^{-1} \circ dg_y^{-1}(T_z W) = \\ &= d(g \circ f)_x^{-1}(T_z W). \end{aligned}$$

\square

Riportiamo ora alcuni risultati sulla trasversalità che ci serviranno nel prossimo capitolo per introdurre la teoria del grado.

Teorema 1.27 (ϵ -neighborhood Theorem). *Dati una varietà senza bordo $Y \subset \mathbb{R}^M$ e un numero positivo ϵ sufficientemente piccolo, sia Y^ϵ un aperto di \mathbb{R}^M con distanza minore di ϵ da Y . L'applicazione $\pi : Y^\epsilon \rightarrow Y$ che associa ad ogni punto di Y^ϵ il punto di Y che ha distanza minima da esso è una submersione.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione si rimanda al [3]. □

Teorema 1.28 (Transversality Homotopy Theorem). *Per ogni applicazione liscia $f : X \rightarrow Y$ e ogni sottovarietà senza bordo Z di Y , anch'essa senza bordo, esiste un'applicazione liscia $g : X \rightarrow Y$ omotopa di f e tale che $g \pitchfork Z$ e $\partial g \pitchfork Z$.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione si rimanda al [3]. □

Definizione 1.29. *Un'applicazione $f : X \rightarrow Y$ è trasversale ad una sottovarietà Z di Y su un sottoinsieme C di X se la condizione di trasversalità*

$$df_x T_x(X) + T_{f(x)}(Z) = T_{f(x)}(Y)$$

è soddisfatta per ogni $x \in C$.

Teorema 1.30. *Sia Z una sottovarietà chiusa di Y , e C un sottoinsieme chiuso di X . Se $f : X \rightarrow Y$ è un'applicazione liscia trasversale a Z su C e ∂f è trasversale a Z su $C \cap \partial X$, allora esiste un'applicazione liscia $g : X \rightarrow Y$ omotopa a f tale che g e ∂g sono trasversali a Z e $g = f$ in un intorno di C .*

Dimostrazione. Per la dimostrazione si rimanda al [3]. □

Passiamo ora a parlare di omotopia.

Definizione 1.31. *Siano f_0 e f_1 due applicazioni lisce tra X e Y . Si dice che f_0 e f_1 sono omotope e si scrive $f_0 \sim f_1$ se esiste un'applicazione liscia $f : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tale che $F(x, 0) = f_0$ e $F(x, 1) = f_1$.*

Teorema 1.32. *L'omotopia è una relazione di equivalenza.*

Dimostrazione.

1. $f \sim f$.

Basta porre $F(x, t) = f(x)$.

2. $f \sim g \Rightarrow g \sim f$.

Sia F l'omotopia tra f e g , definiamo l'omotopia tra g e f come $\tilde{F}(x, t) = F(x, 1 - t)$.

3. $(f \sim g \text{ e } g \sim h) \Rightarrow f \sim h$.

Sia F l'omotopia tra f e g , e G quella tra g e h , definiamo una funzione liscia ausiliaria $\rho(t)$ che valga 0 per $t \leq 1/3$ e 1 per $t \geq 2/3$. Definiamo

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, \rho(2t)) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2, \\ G(x, \rho(2t - 1)) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Costruita in questo modo la H è liscia, basta infatti considerare che

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \begin{cases} 2 \frac{\partial F(x, 2t)}{\partial t} \frac{\partial \rho(2t)}{\partial t} & 0 \leq t \leq 1/2, \\ 2 \frac{\partial G(x, 2t - 1)}{\partial t} \frac{\partial \rho(2t - 1)}{\partial t} & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

e per $t = 1/2$, $\partial \rho / \partial t = 0$.

□

È interessante studiare quali proprietà di un'applicazione rimangono invariate dopo una trasformazione omotopa, ovvero quali proprietà di f_0 sono conservate in f_t con $t < \epsilon$ per qualche $\epsilon > 0$. Queste proprietà vengono chiamate proprietà stabili, e le famiglie di applicazioni che godono delle proprietà stabili vengono dette classi stabili. Per esempio si può dimostrare che i diffeomorfismi locali, le immersioni, le submersioni e i diffeomorfismi sono tutte classi stabili, cfr. [3]. Riportiamo soltanto la dimostrazione che lo sono le applicazioni trasversali ad una data sottovarietà $Z \subset Y$.

Teorema 1.33. *Siano $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione liscia tra varietà di cui X compatta e $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ liscia tale che $f(x) = F(x, 0)$. Allora data $h(x) = F(x, t)$, con $t < \epsilon$, se f è trasversale a una sottovarietà Z di Y , anche h è trasversale a Z , purché ϵ sia abbastanza piccolo.*

Dimostrazione. Dire che $f \pitchfork Z$ equivale a dire che $g \circ f$ è una submersione al punto $x \in f^{-1}(Z)$, dove g è la submersione (g_1, \dots, g_l) definite in un intorno di $y = f(x)$, con l codimensione di Z in Y . Ci basta dimostrare quindi che la submersione è una classe stabile.

Sia f_t un'omotopia della submersione f_0 , dobbiamo trovare un $\epsilon > 0$ tale che

$d(f_t)_x$ è suriettivo per tutti i punti $(x, t) \in X \times [0, \epsilon]$. Per compattezza di X se prendiamo ϵ sufficientemente piccolo ogni intorno di $X \times \{0\}$ contiene $X \times [0, \epsilon]$, quindi è sufficiente provare che per ogni $x_0 \in X$ esiste un intorno di $(x_0, 0)$ nel quale $d(f_t)_x$ è suriettivo. Poiché stiamo lavorando su proprietà locali, ci basta dimostrare che è vera per X aperto di \mathbb{R}^k e Y aperto di \mathbb{R}^l . La suriettività di $d(f_0)_x$ implica che la sua matrice jacobiana $l \times k$

$$\left(\frac{\partial (f_0)_i}{\partial x_j}(x_0) \right)$$

contiene una sottomatrice $l \times l$ non singolare. Poiché per ogni $t \in I$ la derivata parziale

$$\frac{\partial (f_t)_i}{\partial x_j}(x_0),$$

è una funzione continua su $X \times I$ e anche il determinante è una funzione continua, la stessa sottomatrice deve essere non singolare per ogni punto (x, t) in un intorno di $(x_0, 0)$. \square

Fino a questo momento nella nostra trattazione abbiamo fatto esclusivamente uso di applicazioni lisce. Vogliamo ora introdurre alcuni risultati che ci permettono di estendere concetti quali l'omotopia anche alle applicazioni continue e che ci saranno utili in seguito per generalizzare anche la teoria del grado a questa classe di applicazioni.

Definizione 1.34. *Date due applicazioni continue f_0, f_1 tra due varietà X e Y , definiamo omotopia continua tra loro un'applicazione $F: X \times I \rightarrow Y$, dove $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, tale che $F(x, t)$ è continua per ogni t , $F(x, 0) = f_0$ e $F(x, 1) = f_1$. Se tale omotopia esiste, scriveremo $f_0 \sim_o f_1$.*

Teorema 1.35. *Siano $f, g: X \rightarrow Y$ applicazioni lisce. Se $f \sim_o g$ allora $f \sim g$.*

Dimostrazione. Sia $h_o: X \times I \rightarrow Y$ l'omotopia continua tra f e g , con $I = [0, 1]$. Definiamo una funzione liscia ausiliaria $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che valga 0 per $x \leq 1/3$, 1 per $x \geq 2/3$. Possiamo ottenere allora l'omotopia liscia $h: X \times I \rightarrow Y$ componendo h_o con ρ come segue:

$$h(x, t) = h_o(x, \rho(t)).$$

\square

Fine alla fine di questo paragrafo Y denoterà lo spazio euclideo \mathbb{R}^{n+1} o la sfera unitaria $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Definizione 1.36. Date due applicazioni $f: X \rightarrow Y$, $g: X \rightarrow Y$ definiamo la loro distanza come

$$d(g, f) = \max_{x \in X} \|f(x) - g(x)\|,$$

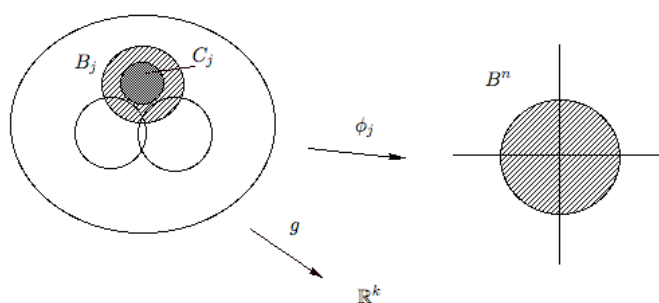
dove $\|\cdot\|$ è la distanza euclidea definita su \mathbb{R}^{n+1} .

Lemma 1.37 (Teorema di approssimazione di Weierstrass). Sia $g: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione continua, dove B^n è la palla di centro l'origine e raggio unitario. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste un polinomio $p: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $d(p, g) < \epsilon$.

Dimostrazione. Per la dimostrazione, cfr ad esempio [8]. □

Teorema 1.38. Sia $g: X \rightarrow Y$ un'applicazione continua, con X compatta. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste un'applicazione $f \in C^\infty(X, Y)$ tale che $d(f, g) < \epsilon$.

Dimostrazione. Consideriamo un ricoprimento costituito da controimmagini di palle piene di \mathbb{R}^n in X . Poiché X è compatta è possibile estrarre da questo un sottoricoprimento finito. Abbiamo quindi ricoperto X con palle $\text{Int}(B_j)$ diffeomorfe a $\text{Int}(B^n) \subset \mathbb{R}^n$, con $j = 1, \dots, s$. Definiamo in ogni $\text{Int}(B_j)$ un sottoinsieme compatto C_j che non ha intersezioni con nessuna $\text{Int}(B_i)$ per $i \neq j$. Definiamo inoltre



$$g_j = g|_{B_j} \circ \phi_j^{-1}: \text{Int}(B^n) \rightarrow \mathbb{R}^k,$$

per il lemma precedente esiste per ogni j un polinomio $p_j: \text{Int}(B^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $d(p_j, g_j) < \epsilon$. Utilizzando la partizione dell'unità costruiamo delle

mappe $\theta_j : X \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\sum_j^s \theta_j = 1, \quad \text{supp}(\theta_j) \subseteq \text{Int}(B_j), \quad \theta_j|_{C_j} = 1.$$

L'applicazione $f : X \rightarrow Y$ cercata può essere definita come

$$f(x) = \sum_{j=1}^s \theta_j(x) p_j(x),$$

infatti

$$\begin{aligned} d(f, g) &= d\left(\sum_j \theta_j p_j, g\right) = \max_{x \in X} \left\| \sum_j \theta_j p_j - g \right\| = \\ &= \max_{x \in X} \left\| \sum_j \theta_j p_j - \sum_j \theta_j g \right\| = \max_{x \in X} \sum_j \theta_j \|p_j - g\| \leq \max_{x \in X} \sum_j \theta_j \epsilon = \epsilon. \end{aligned}$$

□

I seguenti due corollari ci serviranno per passare al caso continuo rispettivamente nei teoremi di Borsuk-Ulam e di Hopf.

Corollario 1.39. *Sia $g : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua con X compatta e $Y = \mathbb{S}^n, \mathbb{R}^{n+1}$. Esiste una successione di applicazioni lisce $f_j : \mathbb{S}^n \rightarrow Y$ che converge uniformemente a g , ovvero $\forall \epsilon > 0$ esiste N_ϵ tale che $\forall j > N_\epsilon$*

$$\|f_j(x) - g(x)\| < \epsilon, \quad \forall x \in X.$$

Dimostrazione. Consideriamo una successione positiva decrescente $\epsilon_j \rightarrow 0$, ad ognuno dei quali per il teorema precedente è associata una f_j liscia. poiché $d(f_j, g) < \epsilon_j$ al tendere di ϵ_j a 0, $d(f_j, g)$ tenderà anch'essa a zero, e dunque la tesi. □

Corollario 1.40. *Sia $g : \mathbb{S}^n \rightarrow Y$ un'applicazione continua ($Y = \mathbb{S}^n, \mathbb{R}^{n+1}$). Allora esiste $f : \mathbb{S}^n \rightarrow Y$, f liscia tale che $f \sim_o g$.*

Dimostrazione. Per il teorema precedente sappiamo che dato $\epsilon > 0$ esiste $f : \mathbb{S}^n \rightarrow Y$ liscia tale che $d(f, g) < \epsilon$. L'applicazione $\gamma : \mathbb{S}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^n$, definita come la geodetica che per ogni $x \in \mathbb{S}^n$ congiunge $f(x)$ con $g(x)$, ossia l'arco di cerchio massimo in \mathbb{S}^n congiungente $f(x)$ e $g(x)$, è l'omotopia cercata. □

1.4 Il Teorema del Punto Fisso di Brouwer.

Introduciamo alcuni risultati riguardanti le varietà unidimensionali con bordo, allo scopo di classificarle. Di seguito utilizzeremo la notazione $\#C(X)$ per indicare il numero delle componenti connesse di X . La seguente dimostrazione è presa dal Milnor [4] pp. 55-56, ed è dovuta a Hirsch.

Lemma 1.41. *Siano $f: I \rightarrow X$ e $g: J \rightarrow X$ due parametrizzazioni locali tali che $f(I) \cap g(J) \neq \emptyset$. Allora si verifica una delle seguenti alternative:*

1. $\#C(f(I) \cap g(J)) = 1$, e in questo caso è possibile trovare una nuova parametrizzazione di $f(I) \cup g(J)$;
2. $\#C(f(I) \cap g(J)) = 2$, e allora X è diffeomorfa a \mathbb{S}^1 .

Dimostrazione. Vogliamo studiare l'insieme dei punti

$$\Gamma = \{(s, t) \in I \times J \mid f(s) = g(t)\},$$

ovvero trovare i punti $s \in I$ per i quali è soddisfatta l'equazione

$$(g^{-1} \circ f)(s) = t \in J.$$

Poiché Γ è il grafico di una varietà, deve essere essa stessa una varietà e la sua dimensione dev'essere pari a quella di I , vale a dire 1. Per come è definita, Γ sarà composta da segmenti di retta giacenti all'interno del rettangolo di lati I e J . Questi segmenti si estenderanno fino al bordo di tale rettangolo, avranno tutti medesima pendenza per iniettività di $g^{-1} \circ f$ e saranno ovviamente tali che ad ogni $s \in I$ corrisponda un solo $t \in J$. Si ricava quindi facilmente che Γ ha al massimo due componenti. Nel caso Γ sia composta da un'unica componente ³, l'insieme dei punti $s \in I$ che soddisfano l'equazione

$$(g^{-1} \circ f)(s) = t \in J,$$

è connesso, per cui possiamo estendere $g^{-1} \circ f$ ad una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e definire un diffeomorfismo tra $F^{-1}(J) \cup I$ e $f(I) \cup g(J)$ come segue

$$x \mapsto \begin{cases} f(t) & t \in I \\ g \circ F(t) & t \in F^{-1}(J) \cup I, \end{cases}$$

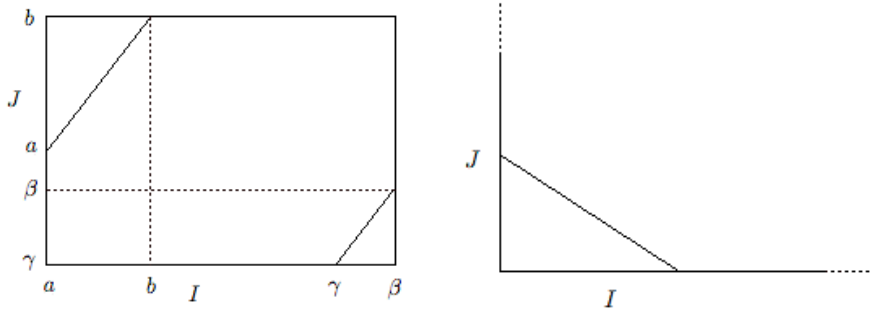
³Se ad esempio I e J sono intervalli aperti, Γ è necessariamente composta da una sola componente.

definendo così la riparametrizzazione di $f(I) \cup g(J)$ cercata.

Se abbiamo due componenti, definiamo l'applicazione $g: \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ tale che

$$\theta \mapsto \begin{cases} f(t) & t \in I, a < t < b \\ g(t) & t \in (J), \gamma < t < \beta, \end{cases}$$

dove abbiamo definito $(a, a), (b, b) \in I \times J$ estremi della prima componente, $(\gamma, \gamma), (\beta, \beta) \in I \times J$ gli estremi della seconda. L'immagine $G(\mathbb{S}^1) \subset X$ è aperta e chiusa in X , e poiché X è connessa gli unici aperti e chiusi sono X stesso o l'insieme vuoto, per cui $G(\mathbb{S}^1) = X$, e G è il diffeomorfismo cercato tra X e \mathbb{S}^1 .



□

Definiamo intervallo di \mathbb{R} un suo sottoinsieme connesso che contenga almeno due punti.

Teorema 1.42. *Ogni varietà compatta, connessa, unidimensionale con bordo è diffeomorfa a un intervallo di \mathbb{R} o alla circonferenza S^1 .*

Dimostrazione. Estendiamo una parametrizzazione $\phi: (0, 1) \rightarrow X$ di X ad una parametrizzazione $f: I \rightarrow X$ che sia massimale. Se $f(I) = X$, allora X è diffeomorfa ad un intervallo di \mathbb{R} ; altrimenti, consideriamo un punto di frontiera x del chiuso $X \setminus f(I)$ e prendiamo una qualsiasi parametrizzazione g di un suo intorno. Poiché f è massimale, $\sharp C(g \cap f) \neq 1$, per cui $\sharp C(g \cap f) = 2$ e dunque per il lemma precedente X è diffeomorfo a S^1 . □

Corollario 1.43. *Il bordo di qualunque varietà unidimensionale compatta con bordo consiste in un numero pari di punti.*

Dimostrazione. Discende direttamente dal teorema, infatti se X è una varietà compatta, ogni sua componente connessa sarà diffeomorfa a \mathbb{S}^1 o all'intervallo $[0, 1]$, per cui il numero dei punti del bordo sarà pari. \square

Abbiamo ora tutti gli strumenti necessari alla dimostrazione del teorema del punto fisso di Brouwer.

Lemma 1.44. *Se X è una varietà compatta con bordo, allora non esiste nessuna applicazione liscia $g: X \rightarrow \partial X$ tale che $\partial g: \partial X \rightarrow \partial X$ sia un'identità. Ovvero non esiste una retrazione di X che copra tutto il bordo.*

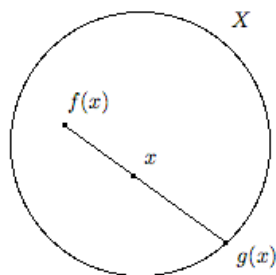
Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che tale g esista e scegliamo un suo valore regolare z , la cui esistenza è garantita dal Teorema di Sard (1.13). Sappiamo che la preimmagine di z , $g^{-1}(z)$, è una varietà compatta con bordo di dimensione $\dim X - \dim(X - 1) = 1$. Poiché ∂g è un'identità, abbiamo

$$\partial g^{-1}(z) = g^{-1}(z) \cap \partial X = \{z\},$$

contrariamente a quanto detto prima sulle varietà con bordo compatte unidimensionali. \square

Teorema 1.45 (Brouwer). *Qualunque applicazione continua $f: B^n \rightarrow B^n$ possiede almeno un punto fisso.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista un'applicazione liscia $f: B^n \rightarrow B^n$ che non ha punti fissi. Consideriamo l'applicazione suriettiva $g: B^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$, con $\mathbb{S}^{n-1} = \partial B^n$. Sia $g(x)$ il punto su \mathbb{S}^{n-1} intersezione del bordo con il segmento uscente da $f(x)$ e passante per x . Notiamo che questa costruzione ha senso in quanto è sempre possibile tracciare la retta passante per x e $f(x)$, poiché $f(x) \neq x \quad \forall x \in B^n$. Se $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, avremo $g(x) = x$, ovvero $g|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ è l'identità.



Per concludere basta dimostrare che g è un'applicazione liscia e grazie al lemma precedente avremo una contraddizione. Poiché x appartiene al segmento che unisce $g(x)$ con $f(x)$, abbiamo per un certo $t > 0$

$$g(x) - f(x) = t(x - f(x)),$$

ovvero

$$g(x) = tx + (1 - t)f(x) = t(x - f(x)) + f(x),$$

dunque g è liscia se è possibile esprimere t in termini di funzioni lisce di x . Passando alla norma abbiamo

$$|g(x)|^2 = t^2|x - f(x)|^2 + |f(x)|^2 + 2tf(x) \cdot (x - f(x)),$$

e sapendo che $|g(x)| = 1$ possiamo risolvere questa equazione in t , la radice positiva sarà l'espressione liscia di t cercata.

Se $f: B^n \rightarrow B^n$ è continua la dimostrazione segue facilmente applicando il Lemma 1.37. □

Capitolo 2

Teoria del grado.

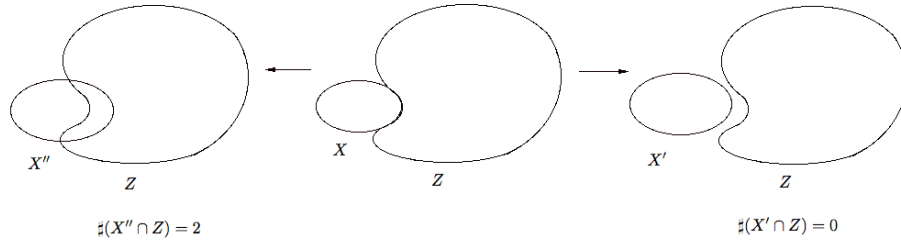
2.1 Numero d'intersezione modulo 2

Date due varietà $X, Z \subset Y$, diciamo che hanno dimensione complementare se

$$\dim X + \dim Z = \dim Y.$$

Se X e Z oltre ad avere dimensione complementare sono anche trasversali, segue dal Teorema 1.11 che la loro intersezione $X \cap Z$ è una varietà zero-dimensionale. Se inoltre esse sono chiuse e almeno una delle due è compatta, allora la loro intersezione è un insieme finito di punti. Il modo più naturale di definire il numero d'intersezione tra X e Z è quello di contare il numero di punti della loro intersezione, ma vorremmo trovare una definizione che valga anche per varietà non trasversali. Meglio, vorremmo qualora X non fosse trasversale a Z , modificarla in modo liscio per renderla tale. Purtroppo così facendo il numero di punti d'intersezione non rimane costante, a meno che non lo si consideri in modulo 2. Per questo motivo si parla di teoria del grado *modulo 2*.

Definizione 2.1. *Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione liscia trasversale ad una sottovarietà chiusa $Z \subset Y$, con X compatta e avente dimensione complementare a Z . Definiamo il numero di intersezione $I_2(f, Z)$ come il numero di punti di $f^{-1}(Z)$ modulo 2. Se $g: Z \rightarrow Y$ è un'altra applicazione liscia e anche Z è compatta, definiamo il numero d'intersezione tra f e g come $I_2(f, g) = I_2(f \times g, \Delta)$, dove Δ è la diagonale di $Y \times Y$. Definiamo inoltre il numero d'intersezione tra due varietà come $I_2(X, Z) = I_2(i, Z)$, dove $i: X \hookrightarrow Y$ è l'inclusione.*



La definizione è ben posta in quanto $f \pitchfork Z$ e $\dim X + \dim Z = \dim Y$ implicano che $f(X) \cap Z$ sia un numero finito di punti, e dunque necessariamente anche $f^{-1}(Z)$. Essa si può inoltre generalizzare a qualunque applicazione liscia $g : X \rightarrow Y$. Qualora infatti g non fosse trasversale a Z , definiamo il numero d'intersezione tra g e Z , $I_2(g, Z)$, con quello di un'altra applicazione omotopa a g che lo sia. Ancora una volta la definizione è ben posta, come garantisce il seguente teorema.

Teorema 2.2. *Se $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ sono omotope e entrambe trasversali a Z , con $\dim X + \dim Z = \dim Y$, allora $I_2(f_0, Z) = I_2(f_1, Z)$.*

Dimostrazione. Sia $F : X \times I \rightarrow Y$ l'omotopia tra f_0 e f_1 , per il Teorema 1.30 abbiamo $F \pitchfork Z$. Sapendo inoltre che $\partial(X \times I) = X \times \{0\} \cup X \times \{1\}$ e che per definizione $\partial F = f_0$ su $X \times \{0\}$ e $\partial F = f_1$ su $X \times \{1\}$, anche ∂F è trasversale a Z . $F^{-1}(Z)$ sarà allora una sottovarietà con bordo di X di dimensione 1, infatti la codimensione di Z in Y è pari alla dimensione di X , e dunque anche la codimensione di $F^{-1}(Z)$ in $X \times I$. Poiché ogni varietà monodimensionale connessa è diffeomorfa a $[0, 1]$ o a S^1 , il suo bordo avrà un numero pari di punti, e poiché

$$\partial F^{-1}(Z) = F^{-1}(Z) \cap \partial(X \times I) = f_0^{-1}(Z) \times \{0\} \cup f_1^{-1}(Z) \times \{1\},$$

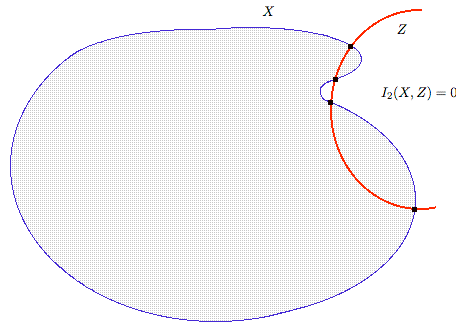
otteniamo $\#f_0^{-1}(Z) = \#f_1^{-1}(Z)$. □

Date due applicazioni lisce $f : X \rightarrow Y$, $g : Z \rightarrow Y$ con X e Z compatte e di dimensione complementare, definiamo $I_2(f, g) = I_2(f \times g, \Delta)$, dove Δ è la diagonale di $Y \times Y$. Definiamo inoltre il numero d'intersezione tra due varietà come $I_2(X, Z) = I_2(i, Z)$, dove $i : X \hookrightarrow Y$ è l'inclusione.

Corollario 2.3. *Se $g_0, g_1 : X \rightarrow Y$ sono due applicazioni omotope, allora $I_2(g_0, Z) = I_2(g_1, Z)$.*

Dimostrazione. Discende direttamente dal teorema e dal fatto che l'omotopia è una relazione d'equivalenza \square

Qualora X sia il bordo di qualche varietà W in Y , allora $I_2(X, Z) = 0$. Infatti se $Z \pitchfork X$, Z deve *entrare* in W tante volte quante deve *uscire*, per cui intersecherà X in un numero pari di punti.



Più in generale, abbiamo il seguente teorema

Teorema 2.4. *Siano X il bordo di una varietà compatta W e $g : X \rightarrow Y$ un'applicazione liscia. Se è possibile estendere g a tutto W allora $I_2(g, Z) = 0$ per ogni sottovarietà Z in Y con dimensione complementare a quella di X .*

Dimostrazione. Sia $G : W \rightarrow Y$ l'estensione di g , ovvero $\partial G = g$. Per il Teorema 1.28 esiste un'applicazione $F : W \rightarrow Y$ omotopa a G tale che per ogni sottovarietà $Z \subset Y$, $F \pitchfork Z$ e $f = \partial F \pitchfork Z$. Poiché $f \sim g$, $I_2(g, Z) = \#g^{-1}(Z) = \#f^{-1}(Z)$. Inoltre la codimensione di Z in Y deve essere uguale alle codimensione di $F^{-1}(Z)$ in W , e dunque $\dim(F^{-1}(Z)) = \dim W - \dim X = 1$. $F^{-1}(Z)$ è dunque una varietà unidimensionale il cui bordo sarà perciò composto da un numero pari di punti: $f^{-1}(Z) = 0 \pmod{2}$, come richiesto. \square

2.2 Grado di un'applicazione modulo 2.

Definizione 2.5. *Date due varietà X e Y della stessa dimensione, con X compatta e Y connessa, si definisce grado modulo 2 di un'applicazione liscia $f : X \rightarrow Y$, e si scrive $\deg_2(f)$, il numero d'intersezione $I_2(f, \{y\})$, dove y è un qualunque punto di Y .*

Osserviamo che questa definizione ha senso in quanto per il Teorema della funzione implicita 1.11, la controimmagine di un valore regolare di un'applicazione tra due spazi di pari dimensione è una varietà zero-dimensionale, poiché inoltre X è compatta, essa sarà costituita da un numero finito di punti. Inoltre vale il seguente

Teorema 2.6. *Se $f: X \rightarrow Y$ è un'applicazione liscia, con X compatta e Y connessa e $\dim X = \dim Y$, allora $I_2(f, \{y\})$ è uguale per ogni $y \in Y$.*

Dimostrazione. Sia $y \in Y$ qualunque, se y non è un valore regolare per f modifichiamola omotopicamente perché lo sia. Per il Teorema 1.12, possiamo scegliere un intorno U di y tale che $f^{-1}(U)$ sia un'unione disgiunta di aperti V_1, \dots, V_n di X tali che la f sia un diffeomorfismo locale in ogni V_i . Per ogni punto $z \in U$, $I_2(f, z) = n$, dunque la funzione definita su Y da $y \rightarrow I_2(f, z)$ è localmente costante e dunque, poiché Y è connesso, lo è anche globalmente. \square

Vediamo ora alcune proprietà del grado di un'applicazione.

Teorema 2.7. *Sia $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ una sequenza di applicazioni lisce tra varietà, di cui X è compatta. Sia g trasversale a una sottovarietà W di Z . Allora*

$$I_2(f, g^{-1}(W)) = I_2(g \circ f, W). \quad (2.1)$$

Dimostrazione. Dalla definizione si ha subito

$$I_2(f, g^{-1}(W)) = \#f^{-1}(g^{-1}(W)) = \#(g \circ f)^{-1}(W) = I_2(g \circ f, W).$$

Dobbiamo però far vedere che $I_2(f, g^{-1}(W))$ è definito se e solo se lo è $I_2(g \circ f, W)$, che si traduce nel dimostrare che:

$$f \pitchfork g^{-1}(W) \iff g \circ f \pitchfork W,$$

$$\dim X + \dim(g^{-1}(W)) = \dim Y \iff \dim X + \dim W = \dim Z.$$

Ma la prima è vera per il Teorema 1.26 e la seconda è equivalente a dire che la codimensione di $g^{-1}(W)$ in Y è uguale alla codimensione di W in Z , che è vero per il Teorema 1.23. \square

2.3 Numero di avvolgimento.

Introduciamo ora un altro invariante omotopico che studia come un'applicazione $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, con X connessa, compatta e di dimensione $n - 1$, piega X in \mathbb{R}^n . Per fare questo, prendiamo un punto $z \in \mathbb{R}^n$ che non appartiene all'immagine di f e studiamo quante volte il vettore unitario

$$u(x) = \frac{f(x) - z}{|f(x) - z|},$$

che indica la direzione da z a $f(x)$, punta in una certa direzione. Dalla teoria del grado sappiamo che $u : X \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ interseca ogni punto sulla sfera lo stesso numero di volte modulo 2, esattamente $\deg_2(u)$ volte, possiamo quindi definire il numero di avvolgimento come il grado dell'applicazione u . Più precisamente

Definizione 2.8. *Sia X un'unipersuperficie di \mathbb{R}^n e f un'applicazione liscia da X in \mathbb{R}^n . Dato $z \in \mathbb{R}^n$, $z \notin \text{Im}(f)$, definiamo numero di avvolgimento $W_2(f, z)$ di f e z modulo 2 come*

$$W_2(f, z) = \deg_2(u), \quad (2.2)$$

con $u : X \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$,

$$u(x) = \frac{f(x) - z}{|f(x) - z|}.$$

Vediamo alcune delle proprietà di cui gode il numero di avvolgimento.

Teorema 2.9. *Sia X il bordo di una varietà compatta con bordo D , e sia $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione liscia che estende f , ovvero $\partial F = f$. Se z è un valore regolare per F che non appartiene a $\text{Im}(f)$, allora $F^{-1}(z)$ è un insieme finito, e $W_2(f, z) = \#F^{-1}(z) \pmod{2}$. In altre parole f avvolge X attorno a z tante volte quante F interseca z in modulo 2.*

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che se z non appartiene a $\text{Im}(F)$ allora $W_2(f, z) = 0$.

Per definizione $W_2(f, z) = \deg_2(u)$, dove

$$u : X \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}, \quad u(x) = \frac{f(x) - z}{|f(x) - z|}.$$

L'applicazione definita da

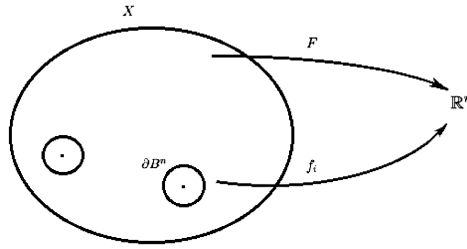
$$U : D \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}, \quad U(x) = \frac{F(x) - z}{|F(x) - z|},$$

estende u a tutto D , dunque per il teorema del bordo $\deg_2(u) = 0$.

Supponiamo ora $F^{-1}(z) = \{y_1, \dots, y_l\}$ e prendiamo nell'intorno di ogni y_i una palla B_i definita come immagine attraverso una qualche parametrizzazione di una palla piena chiusa di \mathbb{R}^n . Facciamo sì che le B_i non si intersechino tra loro nè intersechino il bordo X .

Siano $f_i : \partial B_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ restrizioni di F , vogliamo dimostrare che

$$W_2(f, z) = W_2(f_1, z) + \dots + W_2(f_l, z) \quad \text{mod } 2.$$



Consideriamo l'insieme

$$D' = D \setminus \bigcup_{i=1}^l \text{Int}(B_i)$$

L'immagine della F ristretta a D' non contiene z , dunque come nel caso precedente, $W_2(\tilde{f}, z) = 0$, dove

$$\tilde{f} = \begin{cases} f & \text{se } x \in X \\ f_1 & \text{se } x \in \partial B_1 \\ \vdots & \vdots \\ f_l & \text{se } x \in \partial B_l \end{cases}$$

Sia

$$\tilde{u} : X \cup \partial B_1 \cup \dots \cup \partial B_l \rightarrow S^{n-1}, \quad \tilde{u}(x) = \frac{\tilde{f}(x) - z}{|\tilde{f}(x) - z|},$$

abbiamo

$$\begin{aligned} 0 = W_2(\tilde{f}, z) &= \deg_2(\tilde{u}) = I_2(\tilde{u}, \{s\}) = \# \tilde{u}^{-1}(s) \quad \text{mod } 2 = \\ &= \# u^{-1}(s) + \# u_1^{-1}(s) + \dots + \# u_l^{-1}(s) \quad \text{mod } 2, \end{aligned}$$

dove s è un punto arbitrario di S^{n-1} , e u, u_1, \dots, u_l sono la restrizione di \tilde{u} a $X, \partial B_1, \dots, \partial B_l$, rispettivamente.

Da questo discende facilmente

$$\# u^{-1}(s) \quad \text{mod } 2 = \# u_1^{-1}(s) + \dots + \# u_l^{-1}(s) \quad \text{mod } 2,$$

e dunque

$$\deg_2(u) = \deg_2(u_1) + \cdots + \deg_2(u_l) \quad \text{mod } 2,$$

come richiesto.

Resta da dimostrare che è possibile scegliere le B_i in modo da avere $W_2(f_i, z) = 1$ per ogni $i = 1, \dots, l$. Poiché z è un valore regolare per F il Teorema 1.12 ci garantisce che F porta ogni B_i diffeomorficamente in \mathbb{R}^n . Poiché anche le f_i sono diffeomorfismi locali che portano ogni ∂B_i in una sfera di \mathbb{R}^n , è possibile scegliere le B_i in modo tale che le u_i siano bigettive e che quindi $\#u_i^{-1}(s) = 1$ per ogni $i = 1, \dots, l$. \square

Come conseguenza della dimostrazione del Teorema di Jordan-Brouwer si può ottenere il seguente corollario che verrà utilizzato nella dimostrazione del Teorema di Borsuk-Ulam (vedi sezione 3.2).

Corollario 2.10. *Dato $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$, sia r il raggio uscente da z e trasversale a X . z è all'interno di X se e solo se esso interseca X un numero dispari di volte.*

2.4 Varietà orientabili: definizione e proprietà.

Nel passaggio dalla teoria del grado modulo 2 a quella generalizzata dobbiamo introdurre la nozione di varietà orientata. Procederemo definendo l'orientazione su uno spazio euclideo per poi estenderla alle varietà differenziabili.

Sia quindi V uno spazio vettoriale reale n -dimensionale e fissiamo su di esso una base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$. Diremo che una qualunque altra base β' di V ha la stessa orientazione di β se la matrice di cambiamento di base ha determinante positivo. Dalle proprietà del determinante si ricava facilmente che questa proprietà definisce una relazione di equivalenza sullo spazio delle basi di V , che viene così suddiviso in due classi.

Definizione 2.11. *Si definisce orientazione su V una scelta arbitraria di segno per un elemento di una delle due classi di basi di V .*

Nel caso in cui V sia uno spazio adimensionale la sua orientazione sarà semplicemente la scelta di un segno per la base vuota. L'orientazione standard di \mathbb{R}^n è quella che assegna valore $+1$ alla base canonica.

Definizione 2.12. *Siano V e W due spazi lineari orientati e sia β una base di V . Diciamo che l'isomorfismo $f : V \rightarrow W$ conserva l'orientazione se β e $A\beta$ hanno lo stesso segno, dove A è la matrice di f .*

La definizione appena data è ben posta, in quanto se due basi di V β e β' appartengono alla stessa classe di equivalenza, lo stesso vale per $A\beta$ e $A\beta'$. Possiamo adesso definire l'orientazione su una varietà X di dimensione n

Definizione 2.13. *Un'orientazione su una varietà con bordo X è la scelta di un segno per ogni piano tangente $T_x X$ (con x che varia su tutto X) in modo tale che per ogni $x \in X$ esista una parametrizzazione locale $h : U \rightarrow X$, con $U \subset \mathbb{H}^n$, tale che $dh_x : \mathbb{R}^n \rightarrow T_{h(x)}(X)$ conservi l'orientazione.*

Teorema 2.14. *Una varietà con bordo connessa e orientabile ammette esattamente due orientazioni.*

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che se la varietà è orientata, esistono almeno due orientazioni distinte, in quanto una volta definita la prima, si può ottenere la seconda semplicemente invertendo l'orientazione su ogni piano tangente. Vogliamo dunque dimostrare che se la varietà è anche connessa, non esiste una terza orientazione oltre alle due sopra specificate.

Dimostriamo che l'insieme dei punti di X sul quale le due orientazioni sono concordi e l'insieme sul quale sono discordi sono entrambi aperti, poiché dunque X è connessa e i due insiemi coprono tutto lo spazio, essi non sono distinti per cui esistono solo le due orientazioni sopra descritte.

Siano $h : U \rightarrow X$ e $h' : U' \rightarrow X$ due parametrizzazioni locali attorno al punto $x \in X$, tali che dh_u preserva una delle due orientazioni e dh'_u l'altra, con $u \in U$, $u' \in U'$. Sia $h(0) = x = h'(0)$, e $h(U) = h'(U')$. Se le due orientazioni sono concordi in $T_x X$, allora $d(h^{-1} \circ h')_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ preserva l'orientazione e dunque il determinante di $d(h^{-1} \circ h')_u$ sarà positivo nello zero e per continuità lo sarà anche in un intorno dello zero. Abbiamo dimostrato che se due orientazioni sono concordi in un punto lo sono anche in un intorno di quel punto, allo stesso modo dimostriamo che se esse sono discordi in un punto lo sono anche in un intorno, e quindi gli insiemi sono aperti, come richiesto. \square

2.5 L'orientazione del bordo.

L'orientazione su una varietà con bordo X induce naturalmente un'orientazione sul suo bordo ∂X . Consideriamo il piano tangente alla varietà nei punti del bordo, $T_x(\partial X)$, questo avrà codimensione 1 in $T_x X$, infatti $T_x(\partial X)$ ha dimensione pari a ∂X e quindi uguale a $\dim X - 1$ mentre $T_x X$ ha dimensione pari a $\dim X$. Questo implica che per ogni $x \in \partial X$ esiste una retta l tale che $T_x(\partial X) \oplus l = T_x X$, ovvero esistono due vettori ortogonali a $T_x(\partial X)$ in $T_x X$.

Più rigorosamente consideriamo una parametrizzazione di un intorno di un punto $x \in X$, $h : U \rightarrow X$, dove U è un aperto di \mathbb{H}^k e $h(0) = x$. Il differenziale calcolato nello zero

$$(dh_0)^{-1} : T_x(X) \rightarrow \mathbb{R}^k$$

porta un vettore unitario di $T_x X$ in \mathbb{H}^k , che definiamo vettore *entrante* unitario, e uno in $-\mathbb{H}^k = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_n \leq 0\}$, che chiamiamo invece vettore *uscente* unitario e denotiamo con n_x ¹.

Data una $\beta = \{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ di $T_x(\partial X)$ definiamo il suo segno come il segno della base di $T_x X$ $\{n_x, \beta\} = \{n_x, v_1, \dots, v_{k-1}\}$. Poiché l'orientazione definita in questo modo sui punti del bordo varia con continuità, essa definisce un'orientazione su tutto ∂X .

Un esempio importante è quello dello spazio $I \times X$, dove come sempre $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Vogliamo orientare ogni fetta X_t in modo tale che il diffeomorfismo naturale tra X e X_t preservi l'orientazione. Studiamo innanzitutto l'orientazione di $\partial(I \times X)$ (vedi figura seguente): lungo X_1 il vettore uscente $n_{(1,x)} = (1, 0) \in T_1(I) \times T_x(X)$, per cui ogni base ordinata per $T_{(1,x)}(X_1)$ è $0 \times \beta$, dove β è una base ordinata di $T_x X$.

Secondo la definizione di orientazione sul bordo abbiamo

$$\text{sign}(0 \times \beta) = \text{sign}(n_{(0,1)}, 0 \times \beta),$$

da quella di orientazione del prodotto abbiamo

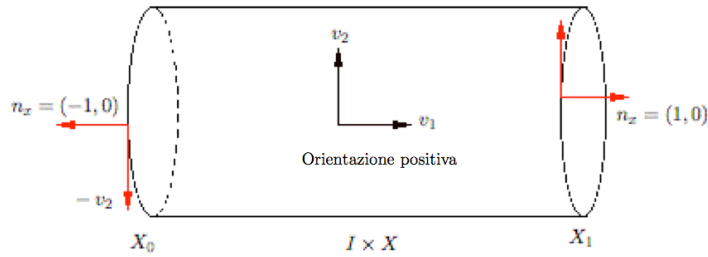
$$\text{sign}(1 \times 0, 0 \times \beta) = \text{sign}(1) \text{sign}(\beta) = \text{sign}(\beta).$$

¹Osserviamo che questa costruzione è indipendente dalla scelta della parametrizzazione, come si è già visto per la definizione 1.16 a pagina 6.

Abbiamo quindi che l'orientazione su X_1 come parte del bordo di $I \times X$ è uguale a quella definita su X . Lungo X_0 invece, il vettore uscente è $n_{(0,x)} = (-1, 0)$, per cui il segno della base $0 \times \beta$ per $T_{(0,x)}(x_0)$ secondo la definizione di orientazione del bordo è

$$\text{sign}(-1 \times 0, 0 \times \beta) = \text{sign}(-1) \text{sign}(\beta) = -\text{sign}(\beta),$$

dunque l'orientazione su X_0 è opposta a quella di X e quindi di X_1 .



2.6 L'orientazione della preimmagine

Siano V_1 e V_2 due spazi vettoriali, e sia $V = V_1 \oplus V_2$. L'orientazione definita su due di questi spazi vettoriali induce l'orientazione del terzo come segue. Siano β_1 e β_2 due basi di V_1 e V_2 rispettivamente, e sia $\beta = (\beta_1, \beta_2)$. Definiamo il segno di β in quanto base di V come $\text{sign}(\beta) = \text{sign}(\beta_1) \text{sign}(\beta_2)$. Notiamo che questa definizione stabilisce univocamente un'orientazione sullo spazio somma, in quanto suddivide le basi di questo in due classi che non vengono alterate da una diversa scelta delle basi β_1 e β_2 . Notiamo inoltre che invertendo l'ordine degli spazi nella somma diretta, potremmo ottenere uno spazio somma con orientazione inversa di quello di partenza, infatti il determinante della base (β_1, β_2) avrà segno opposto di quello di (β_2, β_1) qualora il numero di scambi di colonne necessari per passare da uno all'altro sia dispari.

Definizione 2.15. Consideriamo tre varietà orientate X , Y e Z delle quali solo X con bordo e $Z \subset Y$. Sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione liscia trasversale a Z . Definiamo l'orientazione sulla varietà con bordo $S = f^{-1}(Z)$ con la formula

$$N_x(S; X) \oplus T_x(S) = T_x(X),$$

dove $x \in X$, $f(x) = z \in Z$, $T_x(S)$ è la preimmagine di $T_z(Z)$ tramite la $df_x : T_x(X) \rightarrow T_z(Y)$ e $N_x(S; X)$ è il complemento ortogonale di $T_x(S)$ in $T_x(X)$.

Per ottenere dunque un'orientazione su $T_x(S)$ è necessario definirne una su $N_x(S; X)$. Poiché

$$df_x T_x(X) + T_z(Z) = T_z(Y),$$

e $T_x(S)$ è la preimmagine di $T_z(Z)$, abbiamo

$$df_x N_x(S; X) \oplus T_z(Z) = T_z(Y),$$

e poiché $T_x(S)$ contiene tutto il nucleo di df_x , df_x è un isomorfismo tra $N_x(S; X)$ e la sua immagine, per cui l'orientazione su Y e Z definisce un'orientazione su $df_x N_x(S; X)$ che a sua volta ne definisce una su $N_x(S; X)$ tramite l'isomorfismo df_x .

Dimostriamo ora un lemma di algebra lineare che sarà utile nei paragrafi seguenti.

Lemma 2.16. *Sia E un isomorfismo lineare di \mathbb{R}^k . Se E conserva l'orientazione, allora E è omotopo all'identità. Se E inverte l'orientazione, allora E è omotopo a $E_1(x_1, \dots, x_k) = (-x_1, x_2, \dots, x_k)$.*

Dimostrazione. Consideriamo il caso in cui E conserva l'orientazione.

Per $k = 1$ abbiamo $E = c$, con $c > 0$, e l'omotopia cercata è

$$E_t(x) = tx + (1 - t)cx.$$

Siano $(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ tutti gli autovalori reali di E . Questi generano un sottospazio $V \subset \mathbb{R}^k$. Scriviamo \mathbb{R}^k come $V \oplus W$. Scegliamo una base per V tale che la matrice $A = E|_V$ sia diagonale, e completiamola a base di \mathbb{R}^k . I vettori aggiunti andranno a formare una base per W e avremo che se $v \in V$ i suoi coefficienti rispetto a questi vettori saranno nulli, e viceversa per i vettori appartenenti a W . Rispetto a questa base, E assume allora la forma

$$E = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right),$$

dove

$$A = \left(\begin{array}{ccc} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_l \end{array} \right)$$

e C è un isomorfismo con autovalori tutti complessi da W in sè stesso. Dimostriamo che l'omotopia cercata è $E_t: \mathbb{R}^k \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$E_t = \left(\begin{array}{c|c} A_t & tB \\ \hline 0 & tI + (1-t)C \end{array} \right),$$

dove definiamo A_t come

$$A_t = \begin{pmatrix} t\lambda_1 + (1-t) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & t\lambda_l + (1-t) \end{pmatrix}.$$

Notiamo che A_t è un isomorfismo per come è definita e che il determinante di E_t non è influenzato da tB , per cui dobbiamo dimostrare solo che $tC + (1-t)$ è un isomorfismo di W .

$tI + (1-t)C$ è ovviamente un isomorfismo per $t = 0$ e $t = 1$. Per $t \in (0, 1)$ esso è un isomorfismo se

$$\ker(tI + (1-t)C) = 0,$$

ovvero se

$$(tI + (1-t)C)(v) = 0 \iff v = 0.$$

Ma infatti

$$tv + (1-t)C(v) = 0 \implies C(v) = \frac{t}{t-1}v,$$

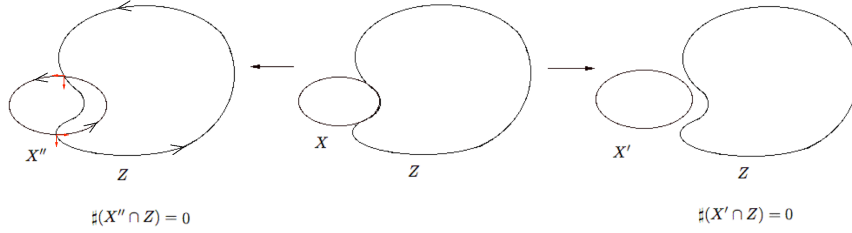
da cui se $v \neq 0$, $\frac{t}{t-1}$ sarebbe un autovalore reale, contrariamente alle ipotesi.

Se E invertisse l'orientazione, $E \circ E_1$ la conserverebbe per cui sarebbe omotopo all'identità, ovvero esisterebbe un isomorfismo $F: \mathbb{R}^k \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^k$ tale che $F(x, 0) = E \circ E_1$, $F(x, 1) = x$, per cui $F'(x, t) = F(E_1^{-1}(x), t)$ è l'omotopia tra E e E_1 , in quanto $E_1^{-1} \circ E_1 = I_{\mathbb{R}^k}$. \square

2.7 Teoria del grado e numero di avvolgimento.

La teoria del grado per varietà orientate è una generalizzazione di quella modulo 2 e in quanto tale si basa sugli stessi principii. Si considerino dunque tre varietà orientate senza bordo, X , Y e Z , tra le quali X sia compatta, Z sia una sottovarietà chiusa in Y e si abbia $\dim X + \dim Z = \dim Y$. Data un'applicazione liscia $f: X \rightarrow Y$, $f \pitchfork Z$, sappiamo che $f^{-1}(Z)$ è una varietà zero-dimensionale composta da un numero finito di punti, ad ognuno

dei quali è possibile assegnare un valore ± 1 in accordo con la definizione di orientazione sulla preimmagine. Definiamo numero d'intersezione di f rispetto a Z , e scriviamo $I(f, Z)$, la somma di questi valori.



Il segno di un singolo punto della preimmagine di Z si calcola facilmente. Se $f(x) = z \in Z$, la trasversalità di f e Z e il fatto che X e Z hanno dimensione complementare ci dicono che

$$df_x T_x(X) \oplus T_z(Z) = T_z(Y).$$

Poiché df_x è un isomorfismo se ristretto alla sua immagine, l'orientazione su X determina l'orientazione su $df_x T_x(X)$ e il numero di orientazione di x sarà $+1$ se l'orientazione su $df_x T_x(X)$ e quella su $T_z(Z)$ determinano un'orientazione su $T_z(Y)$ concorde con quella definita da Y .

Teorema 2.17. *Se $X = \partial W$ e $F : W \rightarrow Y$ sia l'estensione di $f : X \rightarrow Y$. Se f è trasversale a $Z \subset Y$ allora $I(f, Z) = 0$.*

Dimostrazione. Infatti, per il Teorema 1.30 possiamo assumere che anche F sia trasversale a Z e dunque $F^{-1}(Z)$ è una varietà unidimensionale orientata con bordo $\partial F^{-1}(Z) = f^{-1}(Z)$, e dunque la somma dei numeri d'orientazione in $f^{-1}(Z) = 0$. \square

Teorema 2.18. *Il numero d'intersezione è un invariante omotopico.*

Dimostrazione. Supponiamo che f_0 e f_1 sono omotope ed entrambe trasversali a Z . Sia $F : I \times X \rightarrow Y$ un'omotopia tra esse, per il teorema precedente, si ha $I(\partial F, Z) = 0$. Poiché $\partial(I \times X) = X_1 - X_0$, e X_0 e X_1 possono essere identificate con X , ∂F sarà uguale a f_0 su X_0 e a f_1 su X_1 . Si ha dunque

$$\partial F^{-1}(Z) = f_1^{-1}(Z) - f_0^{-1}(Z),$$

e quindi

$$I(\partial F, Z) = I(f_1, Z) - I(f_0, Z).$$

□

È importante notare che è possibile estendere la definizione di numero d'intersezione e i due teoremi precedenti anche ad applicazioni non trasversali a Z , purché si definisca per una generica applicazione g $I(g, Z) = I(f, Z)$, dove f è un'applicazione omotopa a g e trasversale a Z .

Possiamo ora dare la definizione di grado.

Definizione 2.19 (Grado di applicazioni lisce). *Siano X e Y due varietà con le proprietà necessarie alla teoria del grado, e sia inoltre Y connessa e della stessa dimensione di X . Si definisce grado di $f : X \rightarrow Y$ il numero di intersezione di f con un arbitrario punto $y \in Y$:*

$$\deg(f) = I(f, \{y\}).$$

La dimostrazione che questa definizione è ben posta ovvero che $\deg(f)$ è lo stesso per ogni $y \in Y$ è uguale a quella per il grado modulo 2.

Diamo ora la definizione di grado per applicazioni continue, tenendo presenti la definizione di omotopia continua (vedi la Definizione 1.34).

Definizione 2.20 (Grado di applicazioni continue). *Data un'applicazione continua $g : X \rightarrow Y$, con X e Y opportune per la teoria del grado, definiamo*

$$\deg(g) = \deg(f),$$

dove f è un'applicazione liscia ottenuta tramite il Corollario 1.40.

Notiamo che la definizione appena data è ben posta, infatti se $\tilde{f} \in C^\infty(X, Y)$ è tale che $\tilde{f} \sim_o g$, allora poiché $f \sim_o g$ per transitività dell'omotopia $\tilde{f} \sim_o f$, da cui per il Teorema 1.35 $\tilde{f} \sim f$, e per il Teorema di Hopf (4.1) $\deg(\tilde{f}) = \deg(f)$.

Teorema 2.21. *Il grado è un invariante omotopico.*

Dimostrazione. L'asserto discende direttamente dalla definizione di grado e dal Teorema 2.18. □

Come per il grado modulo 2, se anche X è una sottovarietà di Y , definiamo $I(X, Z)$ il numero d'intersezione tra l'immersione canonica di X in Y e Z .

Sempre mantenendo l'analogia con la teoria del grado modulo 2, diamo la seguente definizione di numero di avvolgimento

Definizione 2.22. *Siano X una varietà compatta orientata l -dimensionale e $f : X \rightarrow \mathbb{R}^{l+1}$ un'applicazione liscia. Dato un punto $z \in \mathbb{R}^{l+1} \setminus f(X)$, si definisce numero di avvolgimento di z rispetto a f come $W(f, z) = \deg(u)$, dove $u : X \rightarrow \mathbb{S}^l$*

$$u(x) = \frac{f(x) - z}{|f(x) - z|}.$$

Teorema 2.23. *Sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ un'applicazione liscia definita su un aperto $U \subset \mathbb{R}^k$ e sia x un punto regolare per f , con $f(x) = z$. Sia B una palla chiusa centrata in x sufficientemente piccola e denotiamo con $\partial f : \partial B \rightarrow \mathbb{R}^k$ la restrizione di f al bordo di B . f preserva l'orientazione in x se e solo se $W(\partial f, z) = +1$.*

Dimostrazione. Consideriamo i riferimenti in cui $x = 0 = z$. Poiché 0 è un punto regolare per f , $A = df_0 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ è suriettiva. Se consideriamo un intorno dello 0 abbastanza piccolo, per il Teorema 1.12 essa è inoltre iniettiva. Dunque A è un isomorfismo di \mathbb{R}^k . È possibile scrivere la f come

$$f(x) = Ax + \epsilon(x),$$

dove $\epsilon(x)/|x| \rightarrow 0$ per $|x| \rightarrow 0$. Si avrà allora

$$\frac{\partial f}{|\partial f|} \rightarrow \frac{A}{|A|}, \quad \text{per } |x| \rightarrow 0.$$

Scegliendo B abbastanza piccola avremo allora

$$W(\partial f, 0) = W(A, 0),$$

e dunque l'asserto applicando il Lemma 2.16. □

Teorema 2.24. *Sia $f : B \rightarrow \mathbb{R}^k$ definita su una palla chiusa $B \subset \mathbb{R}^k$ e supponiamo che z sia un valore regolare di f che non ha preimmagine sul bordo ∂B di B . Se $\partial f : B \rightarrow \mathbb{R}^k$, si ha*

$$W(\partial f, z) = \#f^{-1}(z).$$

Dimostrazione. Siano x_1, \dots, x_n i punti preimmagine di z , $x_1, \dots, x_n \notin \partial B$. Per il Teorema 1.12, esistono n palle B_1, \dots, B_n centrate in ognuno di questi punti e a due a due disgiunte. Consideriamo l'insieme

$$B' = B \setminus \bigcup_{i=1}^n B_i,$$

questo non conterrà nessuna preimmagine di z . Calcolando il numero di avvolgimento avremo allora:

$$W(\partial f, z) = \deg(u(x)) = I(u, \{y\}),$$

con $y \in \mathbb{S}^{k-1}$ e $u : \partial B' \rightarrow \mathbb{S}^{k-1}$,

$$u(x) = \frac{\partial f(x) - z}{|\partial f(x) - z|};$$

poiché u si può estendere a tutto B' , per il Teorema 2.17 $W(\partial f, z) = 0$.

Aggiungendo a una a una tutte le B_i in B' , il numero di avvolgimento, per il punto precedente sarà $+1$ o -1 , a seconda che f conservi o inverta l'orientazione, e dunque considerando tutto B si avrà

$$W(\partial f, z) = \pm \#f^{-1}(z).$$

□

Capitolo 3

Il Teorema di Borsuk-Ulam.

3.1 I vari enunciati (nel caso continuo).

Il Borsuk-Ulam è un teorema che si presta a varie enunciazioni, si pensi che lo stesso Borsuk nel suo articolo originale [1] ne riporta tre diverse. Il più classico è il seguente

Teorema 3.1 (Teorema di Borsuk-Ulam). *Per ogni applicazione continua $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ esiste $x \in \mathbb{S}^n$ tale che $f(x) = f(-x)$.*

Diamo ora alcune utili definizioni.

Definizione 3.2. *Un'applicazione $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ o $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ si dice antipodale se $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{S}^n$.*

Nel teorema seguente descriviamo alcuni enunciati equivalenti del Borsuk-Ulam

Teorema 3.3. *I seguenti enunciati sono equivalenti:*

- i) Per ogni $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua, esiste $x \in \mathbb{S}^n$ tale che $f(x) = f(-x)$.*
- ii) Per ogni $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua e antipodale esiste $x \in \mathbb{S}^n$ tale che $f(x) = 0$.*
- iii) Non esiste un'applicazione continua e antipodale da \mathbb{S}^n a \mathbb{S}^{n-1} .*
- iv) Siano F_1, \dots, F_{n+1} sottoinsiemi chiusi di \mathbb{S}^n tali che $\bigcup_{j=1}^{n+1} F_j = \mathbb{S}^n$ allora esiste $x \in \mathbb{S}^n$ tale che $x, -x \in F_j$ per qualche j .*

Dimostrazione. La dimostrazione segue quella fatta nei [2], [6] e [7].

$i) \Rightarrow ii)$. Sia $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione continua e antipodale. Per il Borsuk-Ulam esiste $x \in \mathbb{S}^n$ tale che $f(x) = f(-x)$ ma poiché f è anche antipodale, $f(x) = f(-x) = -f(x)$ e dunque $f(x) = 0$.

$ii) \Rightarrow i)$. Consideriamo un'applicazione continua $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e definiamo $g(x) = f(-x) - f(x)$. Poiché g è antipodale per come è definita, esiste $y \in \mathbb{S}^n$ tale che $g(y) = 0$, ma questo implica $f(-y) = f(y)$.

$ii) \Rightarrow iii)$. Sia $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ antipodale e continua e sia $i : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ l'immersione canonica. Poiché la loro composizione $f \circ i$ va da \mathbb{S}^n a \mathbb{R}^n , per $ii)$ esiste $x \in \mathbb{S}^n$ tale che $(f \circ i)(x) = 0$, in contraddizione col fatto che $f(\mathbb{S}^n) \subset \mathbb{S}^{n-1}$.

$iii) \Rightarrow ii)$. Sia $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ antipodale e continua. Se $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{S}^n$ si può definire un'applicazione antipodale $g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ come $g(x) = f(x)/|f(x)|$, contraddicendo $iii)$.

$i) \Rightarrow iv)$. Siano F_1, \dots, F_{n+1} chiusi di \mathbb{S}^n tali che $\bigcup_{j=1}^{n+1} F_j = \mathbb{S}^n$ definiamo $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ come $f(x) = (d(x, F_1), \dots, d(x, F_n))$, dove con $d(x, F_i)$ intendiamo la distanza tra x e F_i . Per $i)$ esiste $x \in \mathbb{S}^n$ tale che $f(x) = f(-x)$, abbiamo allora due possibilità, se la j -esima coordinata di f è nulla, ovvero $f_j(x) = f_j(-x) = 0$, allora poiché gli F_i sono chiusi, la coppia $\{x, -x\}$ appartiene a F_j ; se nessuna coordinata va a zero, allora la coppia $\{x, -x\}$ dovrà appartenere a F_{n+1} .

$iv) \Rightarrow iii)$. Consideriamo il bordo del simpleso n -dimensionale in \mathbb{R}^n centrato nello 0, ovvero l'insieme

$$\Delta^n = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \in [0, 1] \forall i \right\},$$

e proiettiamolo in \mathbb{S}^{n-1} . Sia F_1, \dots, F_{n+1} il ricoprimento di \mathbb{S}^{n-1} dove ogni F_i è la proiezione di una faccia del simpleso. Notiamo che $F_i \cap (-F_i) = \emptyset$ per ogni $i = 1, \dots, n+1$. Se esiste $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ antipodale, $f^{-1}(F_1), \dots, f^{-1}(F_{n+1})$ coprirebbe \mathbb{S}^n in modo tale che $f^{-1}(F_i) \cap f^{-1}(-F_i) = \emptyset$, contraddicendo $iv)$. \square

3.2 Dimostrazione del Teorema di Borsuk-Ulam: il caso liscio.

Il caso $n = 1$.

La dimostrazione che proponiamo procede per induzione sulla dimensione n degli spazi considerati, vediamo quindi innanzitutto il caso $n = 1$.

Lemma 3.4. *Data un'applicazione liscia $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, esiste $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(\cos t, \sin t) = (\cos(g(t)), \sin(g(t)))$, $g(t+2\pi) = g(t) + 2\pi q$ e $\deg(f) = q$.*

Dimostrazione. Dimostriamo che tale g esiste. Sia

$$f(\cos t, \sin t) = (a(t), b(t)), \quad \text{con } a^2 + b^2 = 1,$$

per $t = 0$ abbiamo $a(0) = \cos g_0$, $b(0) = \sin g_0$ per un qualche g_0 , definiamo la g come segue e verifichiamo che abbia le proprietà richieste.

$$g(t) = g_0 + \int_0^t (a'b + ab') dt,$$

vogliamo che $a(t) = \cos(g(t))$, $b(t) = \sin(g(t))$, ovvero

$$(\cos(g(t)) - a(t))^2 + (\sin(g(t)) - b(t))^2 = 0,$$

da cui segue

$$\cos^2(g(t)) - 2a(t)\cos(g(t)) + a^2 + \sin^2(g(t)) - 2b(t)\sin(g(t)) + b^2 = 0,$$

$$2 - 2(a\cos(g(t)) + b\sin(g(t))) = 0,$$

$$A(t) = a\cos(g(t)) + b\sin(g(t)) = 1;$$

poiché $A(0) = 1$, basta dimostrare che $A'(t) = 0$, infatti allora $A(t)$ è costante e quindi uguale a 1.

$$\begin{aligned} A'(t) &= a'(t)\cos(g(t)) - a\sin(g(t))g'(t) + b'\sin(g(t)) + b\cos(g(t))g'(t) \\ &= a'\cos(g(t)) - a\sin(g(t))(a'b + b'a) + b'\sin(g(t)) + \\ &\quad + b\cos(g(t))(a'b + b'a) \\ &= (a' + a'b + abb')\cos(g(t)) + (b' + a^2b' + aa'b)\sin(g(t)), \end{aligned}$$

ma, derivando la $a^2 + b^2 = 1$ abbiamo $2aa' + 2bb' = 0$, ovvero $aa' = -bb'$, che sostituita nell'ultima equazione manda a zero i coefficienti. Abbiamo quindi

come richiesto $A'(t) = 0$.

Poiché la g é ben definita, abbiamo anche

$$\begin{aligned}\cos(g(t + 2\pi)) &= \cos(g(t)) + 2\pi q, \\ \sin(g(t + 2\pi)) &= \sin(g(t)) + 2\pi q.\end{aligned}$$

Resta da dimostrare ora che q é proprio il grado di f . Per far questo costruiamo una funzione h di grado q e troviamo un'omotopia tra h e f .

Sia $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ definita da $(\cos t, \sin t) \mapsto (\cos qt, \sin qt)$. Poiché $h' = (-q \sin qt, q \cos qt)$ non vá mai a zero (per $q \neq 0$), ogni punto di \mathbb{S}^1 é un valore regolare per h . Scegliamo allora il punto $(1, 0)$ e calcoliamo

$$\deg h = \#h^{-1}(1, 0) = \#\{\text{radici } n\text{-esime dell'unitá}\} = q.$$

Come omotopia $f: \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow \mathbb{S}^1$, con $F(t, 0) = f(t)$, $F(t, 1) = h(t)$ prendiamo l'applicazione

$$F(t, s) = e^{i(g(t)s + qt(1-s))} = (\cos(g(t)s + qt(1-s)), \sin(g(t)s + qt(1-s))),$$

che é l'omotopia cercata in quanto soddisfa alla condizione di regolaritá $F(t + 2\pi, s) = F(t, s)$, infatti

$$\begin{aligned}F(t + 2\pi, s) &= e^{i(g(t+2\pi)s + q(t+2\pi)(1-s))} = e^{i(g(t)s + q2\pi s + qt - qts + 2\pi q - 2\pi qs)} = \\ &= e^{i(g(t)s + qt - qts + 2\pi q)} = e^{i(g(t)s + qt(1-s))} e^{i2\pi q} = e^{i(g(t)s + qt(1-s))},\end{aligned}$$

in cui l'ultima uguaglianza é vera in quanto q é un intero. \square

In virtú del Lemma 3.7, che dimostreremo fra poco, per concludere basta dimostrare il seguente

Teorema 3.5. *Sia $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, tale che $f(-x) = -f(x)$, allora f ha grado d dispari.*

Dimostrazione. La condizione di simmetria puó essere riscritta come

$$e^{ig(t+\pi)} = e^{-ig(t)},$$

che é vera se e solo se $g(t + \pi) = g(t) + d\pi$, dove la $g(t)$ é l'applicazione del Lemma 3.4 e d é dispari, in quanto si deve avere

$$\begin{aligned}\cos(g(t + \pi)) &= -\cos(g(t)), \\ \sin(g(t + \pi)) &= -\sin(g(t)).\end{aligned}$$

Resta da far vedere che d é proprio il grado di g . Infatti

$$g(t + \pi + \pi) = g(t + \pi) + d\pi = g(t) + 2\pi d,$$

la conclusione segue dal Lemma 3.4. \square

Alcuni lemmi.

I seguenti due lemmi stabiliscono l'equivalenza dell'enunciato del Teorema di Borsuk-Ulam che utilizzeremo nella dimostrazione del caso generale con quello classico.

Lemma 3.6. *Per ogni applicazione liscia e antipodale $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ esiste $x \in \mathbb{S}^n$ tale che $f(x) = 0$ se e solo se ogni applicazione liscia e antipodale $g: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ è tale che $\deg_2(g) = 1$.*

Dimostrazione. Dimostriamo che se $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ non ha zeri, allora $g: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ ha grado zero. Data $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ liscia, definiamo $\tilde{f}: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ come $\tilde{f}(x) = (f(x), 0)$. Se $f(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{S}^n$, consideriamo

$$g = \frac{\tilde{f}}{|\tilde{f}|} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n.$$

Dimostrare che $\deg_2(g) = 0$ equivale a trovare un $y \notin \text{Im}(g)$, ovvero tale che $\tilde{f}(x) = |\tilde{f}(x)|y$, ovvero $(f(x), 0) = |f(x)|(0, \dots, 0, 1)$, ma questo è impossibile in quanto abbiamo supposto $f(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{S}^n$.

Viceversa, dimostriamo che se $g: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ ha grado zero, allora $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ non ha zeri. Data $g: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ liscia e antipodale, se $\deg_2(g) = 0$, esiste $x \notin \text{Im}(g)$. A meno di cambiamenti di riferimento, possiamo considerare $x = (0, \dots, 0, 1)$. Se $g = (g_1, \dots, g_{n+1})$, definiamo $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ come $f(x) = (g_1, \dots, g_n)$. Per come è definita la f conserva l'antipodalità e inoltre non esiste $x \in \mathbb{S}^n$ tale che $f(x) = 0$. \square

Lemma 3.7. *Ogni applicazione liscia e antipodale $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ è tale che $\deg_2(f) = 1$ se e solo se ogni applicazione liscia e antipodale $g: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, la cui immagine non contiene l'origine, è tale che $W_2(f, 0) = 1$.*

Dimostrazione. Infatti, abbiamo

$$1 = W_2(g, 0) = \# \left(\frac{g}{|g|} \right)^{-1} (y) = \deg_2 \left(\frac{g}{|g|} \right) = \deg_2 \left(\frac{g}{|g|} \right).$$

\square

Il caso generale.

Passiamo ora al caso generale in dimensione n . Grazie ai lemmi 3.6 e 3.7 è sufficiente dimostrare il seguente

Teorema 3.8. *Sia $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ un'applicazione liscia la cui immagine non contiene l'origine, e supponiamo che f sia antipodale. Allora $W_2(f, 0) = 1$.*

Dimostrazione. Si procede per induzione su n .

Per $n = 1$ é stato già dimostrato nel paragrafo precedente.

Supponiamo ora che sia vero per $n - 1$, e consideriamo l'applicazione simmetrica $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$. Sia \mathbb{S}^{n-1} l'equatore di \mathbb{S}^n , immersa regolarmente tramite l'applicazione $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n, 0)$. Vogliamo calcolare quante volte f arrotola \mathbb{S}^n attorno all'origine, per far questo utilizziamo il Corollario 2.10 e contiamo quante volte $f(\mathbb{S}^n)$ interseca una retta uscente dall'origine. Prendiamo questa retta non passante per l'equatore, per ipotesi induttiva possiamo supporre allora che $f(\mathbb{S}^{n-1})$ intersechi la retta in un numero dispari di punti.

Si denoti la restrizione di f all'equatore con g . Scegliamo la nostra retta l in modo tale che il suo versore \bar{a} sia un valore regolare per entrambe le applicazioni

$$\frac{g}{|g|}: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^n \quad \text{e} \quad \frac{f}{|f|}: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n,$$

scelta possibile per il Teorema di Sard (1.13). Per simmetria anche il vettore $-\bar{a}$ é un valore regolare per entrambe le applicazioni. La condizione di regolarità per $g/|g|$ implica che essa non interseca la retta di direzione \bar{a} , mentre per $f/|f|$ implica che f é trasversale a quella retta, infatti possiamo applicare il Teorema 1.26 con $g: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n$ che ad ogni punto associa la direzione della retta passante per l'origine e il punto stesso.

Per definizione ora abbiamo:

$$W_2(f, 0) = \deg_2 \left(\frac{f}{|f|}, \bar{a} \right) = \# \left(\frac{f}{|f|} \right)^{-1} (\bar{a}) \quad \text{mod } 2.$$

Per simmetria $f/|f|$ interseca \bar{a} tante volte quante interseca $-\bar{a}$, quindi possiamo scrivere

$$\# \left(\frac{f}{|f|} \right)^{-1} (\bar{a}) = \frac{1}{2} \# f^{-1}(l).$$

Sempre per simmetria é sufficiente calcolare questo valore per la semisfera superiore. Sia f_+ la restrizione della f alla semisfera superiore, abbiamo sempre per simmetria

$$\# f_+^{-1}(l) = \frac{1}{2} \# f^{-1}(l) = W_2(f, 0).$$

La semisfera superiore é una varietà con bordo, il cui bordo é l'equatore \mathbb{S}^{n-1} . Per poter applicare l'ipotesi induttiva dobbiamo tuttavia far si che le

dimensioni siano giuste, per far questo consideriamo il complemento algebrico di l , V , e alla proiezione ortogonale $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow V$. Poiché g è simmetrica e π è lineare, $\pi \circ g$ è simmetrica, inoltre non è mai nulla, in quanto g non interseca mai $\pi^{-1}(0) = l$. Per ipotesi induttiva abbiamo $W_2(\pi \circ g, 0) = 1$, identificando V con \mathbb{R}^n .

Poiché $\pi \circ f_+: \mathbb{S}_+^n \rightarrow V$ è trasversale a $\{0\}$, per il Teorema 2.9 abbiamo

$$W_2(\pi \circ g) = \#(\pi \circ f_+)^{-1}(0).$$

Ma $(\pi \circ f_+)^{-1}(0) = f_+^{-1}(l)$, e quindi si può concludere

$$W_2(f, 0) = \#f_+^{-1}(l) = W_2(\pi \circ g) = 1 \pmod{2}.$$

□

3.3 Dimostrazione del Teorema di Borsuk-Ulam: il caso continuo.

Lemma 3.9. *Se per ogni applicazione liscia $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ esiste una coppia di punti antipodali di \mathbb{S}^n che hanno stessa immagine tramite la f in \mathbb{R}^n , allora lo stesso asserto vale per ogni applicazione continua.*

Dimostrazione. Per il Corollario 1.39 esiste una successione di applicazioni lisce $f_j: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ che converge uniformemente ad un'applicazione continua f . Ovvero per ogni $\epsilon > 0$ esiste N_ϵ tale che per ogni $j > N_\epsilon$

$$\|f_j(x) - f(x)\| < \epsilon \quad \forall x \in \mathbb{S}^n.$$

Poiché per le funzioni $C^\infty(X, Y)$ vale il Borsuk-Ulam, per ogni f_j esiste $x_j \in \mathbb{S}^n$ tale che $f_j(x_j) = f_j(-x_j)$. La coppia $\{x, -x\}$ è un punto dello spazio proiettivo reale $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, ed essendo questo un compatto, è possibile estrarre una sottosuccessione convergente. Per comodità chiamiamo sempre x_j questa sottosuccessione, e sia x il punto a cui converge. Vogliamo dimostrare che $f_j(x_j)$ converge a $f(x)$ e $f_j(-x_j)$ a $f(-x)$, così che $f_j(x_j) = f_j(-x_j)$ implica $f(x) = f(-x)$ come richiesto. Ma infatti abbiamo

$$\|f_j(x_j) - f(x)\| < \|f_j(x_j) - f(x_j)\| + \|f(x_j) - f(x)\| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

infatti $\|f_j(x_j) - f(x_j)\| < \epsilon/2$ per convergenza uniforme, e $\|f(x_j) - f(x)\| < \epsilon/2$ in quanto $x_j \rightarrow x$ e f è continua. □

3.4 Alcuni corollari

I seguenti enunciati discendono direttamente dalla dimostrazione del Borsuk-Ulam.

Corollario 3.10. *Se $f : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$ è simmetrica rispetto all'origine, allora f interseca ogni retta passante per l'origine almeno una volta.*

Dimostrazione. Se esistesse una retta l che non interseca f , seguendo la costruzione fatta nella dimostrazione del Teorema di Borsuk-Ulam si avrebbe la contraddizione

$$W_2(f, 0) = \frac{1}{2} \#f^{-1}(l) = 0.$$

□

Corollario 3.11. *Qualunque insieme di k funzioni f_1, \dots, f_k su \mathbb{S}^k che soddisfino la condizione di simmetria $f_i(-x) = -f_i(x)$, per $i = 1, \dots, k$, devono avere uno zero comune.*

Dimostrazione. Per il Corollario 3.10 la

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x), 0).$$

deve intersecare ogni retta passante per l'origine. Essa dovrà in particolare intersecare l'asse x_{k+1} e nel punto di intersezione le f_i vanno tutte a zero. □

Corollario 3.12. *Per qualunque insieme di k funzioni lisce g_1, \dots, g_k su \mathbb{S}^k esiste un punto $x \in \mathbb{S}^k$ tale che*

$$g_1(x) = g_1(-x) = \dots = g_k(x) = g_k(-x).$$

Dimostrazione. Segue dal corollario precedente ponendo $f_i(x) = g_i(x) - g_i(-x)$. □

Corollario 3.13. *Siano p_1, \dots, p_n polinomi omogenei in $n+1$ variabili, tutti di ordine dispari. Le funzioni associate su \mathbb{R}^{n+1} si annullano contemporaneamente su una qualche retta passante per l'origine.*

Dimostrazione. Consideriamo l'applicazione

$$p : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ p(x) = (p_1(x), \dots, p_n(x)),$$

e restringiamola a \mathbb{S}^n . Ogni p_j soddisfa alle condizioni di simmetria

$$p_j(-x) = (-1)^d p_j(x) = -p_j(x),$$

in quanto omogenei e di grado dispari. Per il Corollario 3.11 esiste un $x_0 \in \mathbb{S}^n$ zero di tutti i polinomi, la retta passante per x_0 e 0 é allora la retta cercata, in quanto

$$p_j(\lambda x_0) = \lambda^d p_j(x_0) = 0.$$

□

Il teorema di Borsuk-Ulam ha applicazioni nel campo meteorologico, se si considerano infatti la pressione e la temperatura come due funzioni continue su tutta la superficie terrestre, che possiamo identificare come una superficie sferica, esso ci dice che in ogni istante ci sono due punti antipodali fra loro che hanno stessa pressione e stessa temperatura.

3.5 Dal Borsuk-Ulam al punto fisso di Brouwer.

Daremo ora la dimostrazione di come il Teorema di Borsuk-Ulam implica quello del punto fisso di Brouwer seguendo la costruzione diretta fatta da Francis Edward Su in un articolo pubblicato nel 1997 nell'*American Mathematical Monthly* (vedi [5]).

L'idea di Su é quella di costruire per ogni applicazione continua $f : B^n \rightarrow B^n$ un'applicazione anch'essa continua e antipodale $g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che l'esistenza di uno zero per la g implichi l'esistenza di un punto fisso per la f . Per *ii*) nel Teorema 3.3, possiamo enunciare il Borsuk-Ulam come segue

Teorema 3.14 (Borsuk-Ulam). *Per ogni funzione continua $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ antipodale esiste $x \in \mathbb{S}^n$ tale che $f(x) = 0$.*

Ricordiamo inoltre anche l'enunciato di Brouwer:

Teorema 3.15 (Teorema del punto fisso di Brouwer). *Ogni applicazione continua $f : B^n \rightarrow B^n$ ha un punto fisso.*

Nella dimostrazione proposta, Su sceglie di identificare le palle piene di $B^n \subset \mathbb{R}^n$ con i cubi, o meglio dadi, n -dimensionali $[-1, 1]^n$, e la sfera \mathbb{S}^n come il bordo di $[-1, 1]^{n+1}$ in \mathbb{R}^{n+1} . L'identificazione avviene tramite l'omeomorfismo che identifica il punto P della sfera con il punto del cubo

intersezione con la retta uscente dal centro della sfera e passante per P . Questo omeomorfismo conserva nel cubo la simmetria centrale della sfera rendendo possibile l'uso del teorema di Borsuk-Ulam.

Definiamo faccia superiore ed faccia inferiore del cubo l'insieme dei punti sul cubo che hanno l'ultima coordinata pari a 1 o -1 , ovvero

$$\begin{aligned} S_{inf}^n &= \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in [-1, 1]^{n+1} | x_{n+1} = -1\}, \\ S_{sup}^n &= \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in [-1, 1]^{n+1} | x_{n+1} = 1\}. \end{aligned}$$

Sia $p : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la submersione canonica, ovvero

$$p(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \longrightarrow (x_1, \dots, x_n).$$

Data un'applicazione continua $f : B^n \rightarrow B^n$, definiamo g sulla faccia S_{inf}^n come

$$g(x_1, \dots, x_{n+1}) = p(x_1, \dots, x_{n+1}) + f(-p(x_1, \dots, x_{n+1})),$$

e sulla faccia S_{sup}^n come

$$g(x_1, \dots, x_{n+1}) = p(x_1, \dots, x_{n+1}) - f(p(x_1, \dots, x_{n+1})).$$

Notiamo subito che g è un'applicazione antipodale, infatti sia $-x \in S_{inf}^n$

$$\begin{aligned} g(-x_1, \dots, -x_{n+1}) &= p(-x_1, \dots, -x_{n+1}) + f(-p(-x_1, \dots, -x_{n+1})) \\ &= -(x_1, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_n) \\ &= -[p(x_1, \dots, x_{n+1}) - f(p(x_1, \dots, x_{n+1}))] \\ &= -g(x_1, \dots, x_{n+1}), \end{aligned}$$

in quanto $x \in S_{sup}^n$. Essa è inoltre continua in quanto f e p lo sono.

Vogliamo adesso estendere la g sulle facce laterali del cubo in modo da conservarne la continuità e l'antipodalità, così che l'esistenza di uno zero per g garantita dal Borsuk-Ulam implichi che $p(x)$ è un punto fisso per la f . Il problema principale che si incontra è quello di eliminare la possibilità di incontrare uno zero sulle facce laterali, i seguenti lemmi forniscono un criterio per estendere la g prima sull'equatore e poi su tutte le facce laterali, garantendo che non si azzeri mai.

Definiamo una generica faccia laterale del cubo F come l'insieme dei punti $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in [-1, 1]^{n+1}$ tali che per un certo k , $1 \leq k \leq n$, $|x_k| = 1$.

Lemma 3.16. *Sia F la faccia laterale con $|x_k| = 1$. Per ogni $x \in F \cap (S_{inf}^n \cup S_{sup}^n)$, $g_k(x)$ è zero oppure ha lo stesso segno di x_k .*

Dimostrazione. Per definizione di g in S_{inf}^n e S_{sup}^n , se $g_k(x) \neq 0$,

$$\begin{aligned} g_k(x) &= x_k + f_k(-p(x)), & \text{se } x \in S_{inf}^n, \\ g_k(x) &= x_k - f_k(p(x)), & \text{se } x \in S_{sup}^n. \end{aligned}$$

Poiché $f(x) \in B^n$, $|f_k(x)| \leq 1$, g_k ha lo stesso segno di x_k , come richiesto. \square

Definiamo ora g sull'equatore S_{eq}^n , con

$$S_{eq}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in [-1, 1]^{n+1} | x_{n+1} = 0\},$$

come

$$g(x) = p(x) + \frac{g(x_1, \dots, x_n, 1) + g(x_1, \dots, x_n, -1)}{2},$$

dove con $g(x_1, \dots, x_n, 1)$ e $g(x_1, \dots, x_n, -1)$ si intende utilizzare ovviamente la g come l'abbiamo definita rispettivamente in S_{sup}^n e S_{inf}^n .

Notiamo che per $x \in S_{eq}^n$, la g definita come sopra è continua, in quanto lo sono $p(x)$ e $g(x)$ definite sulle facce superiore e inferiore, ed è antipodale, infatti per l'antipodalità della g definita nelle facce superiore e inferiore si ha

$$\begin{aligned} g(-x) &= -p(x) + \frac{g(-x_1, \dots, -x_n, -1) + g(-x_1, \dots, -x_n, 1)}{2} \\ &= -p(x) + \frac{-g(x_1, \dots, x_n, 1) - g(x_1, \dots, x_n, -1)}{2} \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Il seguente lemma ci garantisce che la g definita in questo modo non andrà mai a zero nell'equatore

Lemma 3.17. *Per ogni $x \in S_{eq}^n$, se $|x_k| = 1$, allora g_k è diverso da zero e ha lo stesso segno di x_k .*

Dimostrazione. Infatti dalla definizione per $x \in S_{eq}^n$

$$g_k(x) = x_k + \frac{g_k(x_1, \dots, x_n, 1) + g_k(x_1, \dots, x_n, -1)}{2},$$

utilizzando il risultato ottenuto nel Lemma 3.16, le $g_k(x_1, \dots, x_n, \pm 1)$ possono o essere nulle, e allora $g_k(x) = x_k$, oppure avere lo stesso segno di x_k , e dunque anche $g_k(x)$ lo avrà. \square

In effetti il lavoro fatto da $g(x_1, \dots, x_n, 0)$ è quello di fare la media tra i valori che (x_1, \dots, x_n) ha nelle facce superiore e inferiore, e traslare il valore ottenuto della quantità $p(X)$ in modo da essere certi che non sia nulla.

A questo punto non resta che definire la g sulla parte restante di \mathbb{S}^n . Per $0 \leq x_{n+1} \leq 1$,

$$g(x) = x_{n+1}g(x_1, \dots, x_n, 1) + (1 - x_{n+1})g(x_1, \dots, x_n, 0).$$

Per $-1 \leq x_{n+1} \leq 0$,

$$g(x) = -x_{n+1}g(x_1, \dots, x_n, -1) + (1 + x_{n+1})g(x_1, \dots, x_n, 0).$$

Con questa definizione la g è ancora continua, perché somma di funzioni continue, ed è sempre antipodale, in quanto, per $0 \leq x_{n+1} \leq 1$

$$\begin{aligned} g(-x) &= -(-x_{n+1})g(-x_1, \dots, -x_n, -1) + (1 + (-x_{n+1}))g(-x_1, \dots, -x_n, 0) \\ &= -x_{n+1}g(x_1, \dots, x_n, 1) - (1 - x_{n+1})g(x_1, \dots, x_n, 0) \\ &= -g(x). \end{aligned}$$

Essa inoltre non va mai a zero, grazie al seguente

Lemma 3.18. *Se $|x_{n+1}| < 1$, allora $g(x) \neq 0$.*

Dimostrazione. Utilizziamo la definizione e i lemmi precedenti.

Poiché $|x_{n+1}| < 1$ siamo su una faccia laterale, esisterà quindi un k , $1 \leq k \leq n$ per cui $|x_k| = 1$. Avremo $g(x_1, \dots, x_n, 0)$ mai nulla e dello stesso segno di x_k , per cui nel caso $x_{n+1} = 0$ e/o $g(x_1, \dots, x_n, \pm 1) = 0$, $g(x)$ sarà diversa da 0. Se x_{n+1} è positivo, poiché anche $1 - x_{n+1}$ è positivo abbiamo una somma di due fattori dello stesso segno, quello x_k , per cui non si annulleranno mai. Similmente per x_{n+1} negativo. \square

Abbiamo dunque definito un'applicazione continua e antipodale su tutto il nostro cubo, l'esistenza di uno zero per questa, garantita dal Borsuk-Ulam, e il fatto che questo si troverà necessariamente su una delle due facce superiore o inferiore, implica che $p(x)$ sia un punto fisso per la f . Questo conclude la dimostrazione.

Capitolo 4

Il Teorema di Hopf.

Siano X e Y due varietà compatte, connesse e della stessa dimensione, $\dim X = \dim Y = n$, e $f_0 : X \rightarrow Y$, $f_1 : X \rightarrow Y$ due applicazioni continue e omotope. Dal Teorema 2.2 segue che $\deg(f_0) = \deg(f_1)$. In questo capitolo dimostreremo che nel caso $Y = \mathbb{S}^n$ il grado consente di individuare la classe di omotopia di un'applicazione $f : X \rightarrow \mathbb{S}^n$. Più precisamente vale il seguente

Teorema 4.1 (Teorema di Hopf). *Due applicazioni continue $f_0, f_1 : X \rightarrow \mathbb{S}^n$ da una varietà compatta, connessa e orientata X di dimensione n alla sfera \mathbb{S}^n sono omotope se e solo se hanno lo stesso grado.*

Nel prossimo paragrafo raccoglieremo alcuni lemmi che verranno utilizzati nel Paragrafo 4.2 per ottenere una dimostrazione parziale del Teorema di Hopf nel caso liscio e a grado zero, mentre il Paragrafo 4.3 è dedicato alla dimostrazione generale.

4.1 Lemma d'Isotopia e lemmi di estensione.

Definiamo isotopia un'omotopia in cui ogni applicazione è un diffeomorfismo. Due diffeomorfismi sono isotopi se esiste un'isotopia che li unisce. Un'isotopia viene detta *supportata da un compatto* se esiste un insieme compatto per cui ogni diffeomorfismo dell'isotopia è uguale all'identità all'esterno di esso.

Lemma 4.2. *Dati Y una varietà connessa e x e z due punti ad essa appartenenti, esiste un diffeomorfismo $h : Y \rightarrow Y$ isotopo all'identità e tale che $h(x) = z$. Inoltre h può essere scelto uguale all'identità fuori da un insieme compatto.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione si rimanda al [3], p. 142. \square

Corollario 4.3. *Siano Y una varietà connessa di dimensione maggiore di 1 e $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n$ due insiemi distinti di suoi punti. Esiste un diffeomorfismo $h : Y \rightarrow Y$ isotopo all'identità e tale che*

$$h(y_1) = z_1, \dots, h(y_n) = z_n.$$

L'isotopia può essere inoltre presa supportata da un compatto.

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su n . Per $n = 1$ abbiamo il Lemma d'Isotopia, supponiamo allora l'asserto vero per $n - 1$ e dimostriamolo per n . Sappiamo quindi che esiste un'isotopia h'_t supportata da un compatto della varietà $Y \setminus \{y_n, z_n\}$ tale che $h'_1(y_i) = z_i$ per $i = 1, \dots, n - 1$, e tale che h'_0 è l'identità. Abbiamo usato il fatto che $Y \setminus \{y_n, z_n\}$ è connessa in quanto la dimensione di Y è > 1 per ipotesi. Poiché h'_t è supportata da un compatto essa è uguale all'identità in un intorno di y_n e z_n , e dunque può essere estesa a tutto Y con un'applicazione che lasci fissi questi due punti. Applicando il Lemma d'Isotopia a $Y \setminus \{y_1, \dots, y_{n-1}, z_1, \dots, z_{n-1}\}$ e ripetendo lo stesso ragionamento otteniamo un'isotopia h''_t su Y tale che $h''_1(y_n) = z_n$, h''_0 sia l'identità e ogni h''_t fissi i punti y_i, z_i , per $i = 1, \dots, n - 1$. L'isotopia h_t cercata può allora essere definita come $h_t = h''_t \circ h'_t$. \square

Concludiamo la sezione con i seguenti due lemmi di estensione.

Lemma 4.4. *Consideriamo l'applicazione liscia $f : \mathbb{R}^k \setminus \text{Int}(B) \rightarrow Y$, dove B è sempre una palla chiusa di \mathbb{R}^k . Se la restrizione $\partial f : \partial B \rightarrow Y$ è omotopa ad una costante, allora f può essere estesa ad una applicazione liscia da \mathbb{R}^k a Y .*

Dimostrazione. Supponiamo per semplicità che B sia centrata nello zero. Sia $g : \mathbb{R}^k \setminus \text{Int}(B) \times [0, 1] \rightarrow Y$ l'omotopia tra ∂f e una funzione c costante, ovvero $g(x, 1) = \partial f(x)$, $g(x, 0) = c$. Un'estensione di f all'interno di B può essere $F(\rho(t)x) = g(x, \rho(x))$, con $\rho : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funzione liscia che valga 1 per $0 \leq t \leq 1/2$, 0 per $1/2 \leq t \leq 1$. \square

Lemma 4.5. *Date una varietà compatta con bordo W e un'applicazione liscia $f : \partial W \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$, è possibile estendere f a tutto W .*

Dimostrazione. Sia $W \subset \mathbb{R}^N$. Per il Teorema 1.27 esistono un intorno U di ∂W in \mathbb{R}^N e un'applicazione liscia $\pi : U \rightarrow \partial W$ tali che $\pi(u) = u$ se $u \in \partial W$. Sia $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ definita da $F(u) = f(\pi(u))$. Ovviamente F è un'estensione di f nell'aperto U . Consideriamo una funzione liscia ρ che sia pari a uno su ∂W e nulla all'esterno di un sottoinsieme compatto di U . L'estensione di f cercata può dunque essere definita come quella funzione uguale a zero su tutto $\mathbb{R}^N \setminus U$ e pari a ρF su U . \square

4.2 Caso liscio e a grado zero.

Prima di dimostrare il Teorema di Hopf illustreremo il caso particolare in cui il grado dell'applicazione considerata è zero.

Teorema 4.6. *Qualunque applicazione liscia $f : \mathbb{S}^l \rightarrow \mathbb{S}^l$ con grado zero è omotopa ad un'applicazione costante.*

La dimostrazione procede per induzione su l , cominciamo provando i seguenti lemmi.

Lemma 4.7. *Siano $f_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $f_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ due applicazioni lisce. f_0 e f_1 hanno lo stesso grado se e solo se sono omotope.*

Dimostrazione. Dal Teorema 2.18 sappiamo che due applicazioni omotope hanno lo stesso grado, resta da dimostrare che se f_0, f_1 hanno lo stesso grado allora sono omotope.

Sappiamo dal Lemma 3.4 che esistono due applicazioni $g_0, g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $g_i(t+1) = g_i(t) + 2\pi q_i$ e $\deg(g_i) = q_i$, $i = 0, 1$. Definiamo la famiglia di applicazioni $g_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$g_s(t) = s g_0(t) + (1-s) g_1(t),$$

poiché se $q_0 = q_1 = q$ si ha ancora $g_s(t+1) = g_s(t) + 2\pi q$ per ogni s , se f_0, f_1 hanno lo stesso grado, si può definire come omotopia $g_s/|g_s|$. \square

Lemma 4.8. *Sia $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ un'applicazione liscia che abbia 0 come valore regolare. Supponiamo che $f^{-1}(0)$ sia un insieme finito di punti tale che la loro somma se contati con l'orientazione sia 0. Allora esiste un'omotopia tra f e $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ che sia pari a f per ogni t all'esterno di un compatto, purché sia verificata l'ipotesi induttiva per $l = k - 1$.*

Dimostrazione. Consideriamo una palla B di \mathbb{R}^k abbastanza grande da contenere tutti i punti di $f^{-1}(0)$. Per il Teorema 2.24 il numero delle preimmagini dello 0 contate con l'orientazione è pari al numero di avvolgimento $W(\partial f, 0)$, dove $\partial f : \partial B \rightarrow \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ restrizione di f al bordo di B . Dunque abbiamo $W(\partial f, 0) = 0$, ovvero è la

$$\deg \left(\frac{\partial f}{|\partial f|} \right) = 0,$$

ma per l'ipotesi induttiva questo vuol dire che $\partial f/|\partial f|$ è omotopa ad una applicazione costante e dunque per il Teorema 4.4 esiste un'applicazione $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ tale che $g = f$ all'esterno di B .

Consideriamo ora la retta

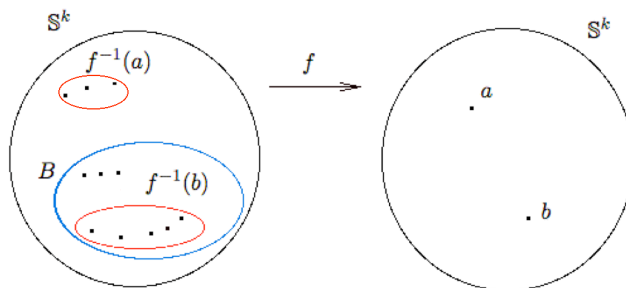
$$tf(x) + (1-t)\frac{f(x)}{|f(x)|} = F(x, t),$$

essa è l'omotopia cercata, infatti è pari a f all'esterno di B ed è ben definita in quanto la retta non passa mai per l'origine. \square

Passiamo ora a dimostrare il teorema.

Dimostrazione del Teorema 4.6. Il caso $l = 1$ è stato già dimostrato nel primo lemma, consideriamo quindi l'asserto verificato per $l = k-1$ e proviamolo per k .

Siano a e b due valori regolari per f . La loro controimmagine sarà un insieme



finito di punti distinti. $\mathbb{S}^k \setminus f^{-1}(b)$ è una varietà connessa, consideriamo un aperto $B \subset \mathbb{S}^k \setminus f^{-1}(b)$ contenente $f^{-1}(a)$ e diffeomorfo a \mathbb{R}^k . Per il Lemma di Isotopia 4.2 esiste un diffeomorfismo h che porta i punti di $f^{-1}(a)$ in B , e dunque esiste un aperto U contenente $f^{-1}(a)$, disgiunto da $f^{-1}(b)$ e diffeomorfo a B e dunque a \mathbb{R}^k . Sia α un diffeomorfismo tra \mathbb{R}^k e U e consideriamo inoltre il diffeomorfismo β tra la sfera meno un punto $\mathbb{S}^k \setminus \{b\}$ e \mathbb{R}^k , tale che

$\beta(a) = 0$. Consideriamo la funzione $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tilde{f} = \beta \circ f \circ \alpha$. Osserviamo che $0 \in \mathbb{R}^n$ è un valore regolare per \tilde{f} e inoltre poiché $\deg(f) = 0$, $\#\tilde{f}^{-1}(0) = 0$. Possiamo dunque applicare il Lemma 4.8 e trovare un'applicazione $\tilde{g} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ omotopa a \tilde{f} tramite la $t\tilde{f} + (1-t)\tilde{g}$ e tale che fuori da un compatto K sia uguale a \tilde{f} .

Poiché $\beta \circ f \circ \alpha \sim \tilde{g}$, possiamo definire un'isotopia $F : U \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{b\}$ tra $f : U \rightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{b\}$ e $\beta^{-1} \circ \tilde{g} \circ \alpha^{-1} : U \rightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{b\}$. Poiché $f^{-1}(K) \subset U$, $F = f$ fuori da $f^{-1}(U)$ (indipendentemente da t) e quindi F può essere estesa ad un'omotopia tra $f : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^k$ e $g : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^k \setminus \{b\} = \mathbb{R}^k$. \square

Corollario 4.9. *Se $f : \mathbb{S}^l \rightarrow \mathbb{R}^{l+1} \setminus \{0\}$ ha numero di avvolgimento zero rispetto all'origine, allora è omotopa ad un'applicazione costante.*

Dimostrazione. Se f ha numero di avvolgimento zero rispetto all'origine vuol dire che il grado di $f/|f|$ è zero e dunque per il Teorema 2.21 essa è omotopa ad un'applicazione costante. D'altra parte identificando $\mathbb{R}^{l+1} \setminus \{0\}$ con \mathbb{S}^l è facile vedere che f e $f/|f|$ sono anch'esse omotope e dunque per transitività dell'omotopia si ha l'asserto. \square

4.3 Dimostrazione del Teorema di Hopf.

Il Teorema di Hopf è in realtà un teorema di estensione, esso infatti può essere visto come caso particolare del seguente:

Teorema 4.10. *Date una varietà con bordo W compatta, connessa e orientata di dimensione $k + 1$ e un'applicazione liscia $f : \partial W \rightarrow \mathbb{S}^k$, esiste un'applicazione liscia $F : W \rightarrow \mathbb{S}^k$ che estende f se e solo se il grado di f è zero.*

Infatti,

Dimostrazione del Teorema di Hopf. Per il Corollario 1.40 esistono due applicazioni lisce g_0, g_1 con $g_0 \sim_o f_0$ e $g_1 \sim_o f_1$. Se f_0 e f_1 sono omotope C^0 , per transitività avremo anche $g_0 \sim_o g_1$, e per il Teorema 1.35, $g_0 \sim g_1$. Poiché per il Teorema 2.21 applicazioni omotope hanno lo stesso grado, possiamo continuare la dimostrazione sostituendo g_0 e g_1 a f_0 e f_1 .

Sia $X \times I = W$, con $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Definiamo $g : \partial W \rightarrow \mathbb{S}^k$ tale che sia uguale a g_0 in $X \times \{0\}$ e a g_1 in $X \times \{1\}$. Il grado di questa applicazione è zero, applicando il teorema precedente troviamo la mappa $g : X \times I \rightarrow \mathbb{S}^k$, che è l'omotopia cercata. \square

Dimostrazione del Teorema 4.10. Per il Lemma 4.5 esiste un'applicazione liscia $F : W \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ tale che $F|_{\partial W} = f$. Supponiamo che 0 sia un valore regolare per F e notiamo che $F^{-1}(0)$ non va sul bordo ∂W di W perché f va sulla sfera, ed è un numero finito di punti perché W è compatta.

Per il Lemma di Isotopia 4.2 esiste un diffeomorfismo h che sposta i punti di $F^{-1}(0)$ dentro una palla B che non interseca quei punti e tale che all'infuori di un compatto K è l'identità. Componendo F e h abbiamo ancora un'estensione di f , per comodità la chiamiamo ancora F .

Abbiamo

$$F|_{\partial B} : \partial B \rightarrow \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\},$$

e $W(F|_{\partial B}, 0) = 0$, infatti per il Teorema 2.24

$$\deg \left(\frac{F|_{\partial W \setminus \text{Int}(B)}}{|F|_{\partial W \setminus \text{Int}(B)}} \right) = 0,$$

in quanto 0 non ha preimmagini in $W \setminus \text{Int}(B)$, e inoltre

$$\deg \left(\frac{F}{|F|} \right) = \deg \left(\frac{F|_{\partial B}}{|F|_{\partial B}} \right) - \deg \left(\frac{F|_{\partial W}}{|F|_{\partial W}} \right) = 0,$$

in cui l'ultimo addendo è zero in quanto è il grado di f che è nullo per ipotesi. Per il Corollario 4.9, abbiamo che $F|_{\partial B}$ è omotopa ad una costante, possiamo quindi applicare il Lemma 4.4 alla mappa $F : W \setminus \text{Int}(B) \rightarrow \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$ e estendere F a tutto W . Per concludere componiamo l'applicazione ottenuta $F : W \rightarrow \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$ con una proiezione che porti $\mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$ su \mathbb{S}^k . \square

Bibliografia

- [1] Borsuk, K. *Drei Sätze über die n -dimensional euklidische Sphäre*, Fundamenta Mathematicae, 20:177-190, 1933.
- [2] Lyusternik L. e Shnirel'man S. *Topological Methods in Variational Problems*, Issledowatelskii Institut Matematiki i Mechaniki pri O. M. G. U. Moscow, 1930.
- [3] V. Guillemin e A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., Englewood cliffs, New Jersey.
- [4] John W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, The University Press of Virginia, Charlottesville.
- [5] F. E. Su, *Borsuk-Ulam implies Brouwer: a direct construction*, American Mathematical Monthly, 104 (1997), pp. 855-859.
- [6] Articolo di A. Suciú e M. Fries, *The Borsuk-Ulam Theorem and Applications*, Department of Mathematics Northeastern University, 2005.
- [7] Lezione di Sanjeev Arora, scritta da Nir Ailon e Iannis Turlakis, *Topological Non-Constructive Methods*, Princeton University.
- [8] Dieudonné J., *Foundations of Modern Analysis*. New York: Academy Press, 1960.
- [9] M. Spivak, *Calculus on Manifolds*. New York: Benjamin, 1965.