



**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI**

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

**Immersioni isometriche del piano iperbolico  
nello spazio Euclideo**

Relatore  
Prof. Andrea Loi

Tesi di laurea di  
Michela Loi

ANNO ACCADEMICO 2007–2008

*Alla mia famiglia*

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Piano iperbolico, disco e semipiano di Poincarè</b>	<b>5</b>
1.1 Tre modelli di geometria iperbolica . . . . .	5
1.1.1 Isometria tra $(D, g_D)$ e $(H, g_H)$ . . . . .	6
1.1.2 Isometria tra $(\mathbb{R}^2, g_{hyp})$ e $(H, g_H)$ . . . . .	7
<b>2 Curve asintotiche</b>	<b>9</b>
2.1 Equazione delle curve asintotiche e parametrizzazione locale asintotica . . . . .	9
2.2 Punti iperbolici e curve asintotiche . . . . .	11
2.3 La rete di Tchebyshef . . . . .	12
<b>3 Applicazione esponenziale e Teorema di Hadamard</b>	<b>15</b>
3.1 Definizione e prime proprietà . . . . .	15
3.2 Ricoprimenti . . . . .	17
3.3 Il Teorema di Hadamard . . . . .	17
<b>4 Il Teorema di Hilbert</b>	<b>20</b>
4.1 Dimostrazione del Teorema 4.1 . . . . .	20

## Introduzione

Lo studio dell'immersibilità isometrica di una data varietà Riemanniana  $(S, g)$  nello spazio Euclideo  $n$ -dimensionale  $\mathbb{R}^n$  (cioè  $\mathbb{R}^n$  dotato della metrica piatta) è stato affrontato per la prima volta da John Nash nel suo famoso articolo *The embedding problem for Riemannian manifolds* (vedi [6]). In questo lavoro viene dimostrato che per un certo  $n$  sufficientemente grande (dipendente dalla dimensione della varietà  $S$ ) esiste un'immersione isometrica di  $(S, g)$  in  $\mathbb{R}^n$ . Negli anni successivi alla pubblicazione del lavoro di Nash vari matematici hanno cercato di trovare la dimensione ottimale  $n$  per la quale una data varietà Riemanniana  $(S, g)$  possa essere immersa in  $\mathbb{R}^n$  (vedi in particolare il lavoro di Gromov [4]). In generale trovare un tale  $n$  è molto complicato e un problema ancora aperto per varietà Riemanniane generali. In questa tesi consideriamo il caso delle immersioni isometriche in uno spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$ , quando  $(S, g)$  è una superficie completa con curvatura di Gauss costante e negativa. Grazie al lavoro di Poznyak (vedi [7]), tale superficie ammette un'immersione isometrica in  $\mathbb{R}^4$ . In effetti il numero 4 è la dimensione ottimale. Infatti questo è una conseguenza del seguente teorema.

**Teorema di Hilbert.** *Sia  $S$  una superficie dotata di una metrica Riemanniana  $ds^2$ , rispetto alla quale  $S$  è completa e ha curvatura di Gauss costante e negativa. Allora  $S$  non può essere immersa isometricamente in  $\mathbb{R}^3$ .*

In questa tesi forniamo una dimostrazione di tale teorema. L'idea della dimostrazione è la seguente. Per il Teorema di Hadamard (vedi Capitolo 3) possiamo assumere che la nostra superficie sia il piano iperbolico, cioè  $S = \mathbb{R}^2$  e  $g = g_{hyp}$ , definita come nella (1.5). Se  $(\mathbb{R}^2, g_{hyp})$  ammettesse un'immersione isometrica in  $\mathbb{R}^3$  allora esisterebbe un intorno di un punto  $p \in \mathbb{R}^2$  ed una parametrizzazione locale  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , tale che le curve coordinate siano asintotiche, formino una rete di Tchebyshef, e inoltre ogni quadrilatero formato da esse avrebbe area più piccola di  $2\pi$  (vedi Capitolo 2 e in particolare il Corollario 2.15). Un'analisi dettagliata di questa parametrizzazione mostra che essa può essere estesa ad una parametrizzazione globale  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow S = \mathbb{R}^2$ , tale che le curve coordinate siano parametrizzate con ascissa curvilinea, o equivalentemente, formino una rete di Tchebyshef (vedi Capitolo 4). Allora sarebbe possibile ricoprire  $S = \mathbb{R}^2$  con quadrilateri  $Q_n$ , formati da curve asintotiche,

---

tali che  $Q_n \subset Q_{n+1}$ , con l'area di  $Q_n$  minore di  $2\pi$ ; in contraddizione col fatto che l'area di  $(\mathbb{R}^2, g_{hyp})$  è infinita.

# Capitolo 1

## Piano iperbolico, disco e semipiano di Poincarè

### 1.1 Tre modelli di geometria iperbolica

Per i dettagli sul capitolo consultare [2, pag.430-431] e [1, pag.405].

Consideriamo tre modelli di geometria iperbolica

1. disco di Poincarè  $(D, g_D)$

Sia

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \quad (1.1)$$

dotato della metrica

$$g_D = 4 \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2} \quad (1.2)$$

2. semipiano di Poincarè  $(H, g_H)$

Sia

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \quad (1.3)$$

dotato della metrica

$$g_H = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \quad (1.4)$$

3. piano iperbolico  $(\mathbb{R}^2, g_{hyp})$

Sia  $\mathbb{R}^2$  dotato della metrica

$$g_{hyp} = dx^2 + e^{2u} dy^2. \quad (1.5)$$

Entrambi i modelli rappresentano superfici (varietà di dimensione 2) in  $\mathbb{R}^3$ , complete e con curvatura di Gauss  $K = -1$ .

### 1.1.1 Isometria tra $(D, g_D)$ e $(H, g_H)$

Ricordiamo che una trasformazione di Möbius è una applicazione

$T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $z \mapsto T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , con  $(ad-bc) \neq 0$  dove  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ .

Consideriamo la trasformazione corrispondente alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

per la quale risulta  $\det(A) = 1$ .

Identifichiamo  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  e  $H = \{z' \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z') > 0\}$ .

Sia  $\psi : D \rightarrow H$  definita da  $z \mapsto \psi(z) = \frac{z+i}{zi+1}$ .

Si verifica facilmente che essa è un diffeomorfismo. Dimostriamo invece che per ogni  $z \in D$  e  $v, w \in T_z D$  si ha

$$g_D(v, w)_z = g_H(d\psi_z(v), d\psi_z(w))_{\psi(z)} \quad \text{dove } d\psi_z : T_z D \rightarrow T_{\psi(z)} H. \quad (1.7)$$

Un vettore tangente a  $\mathbb{C}$  in  $z$ , può essere identificato ad un vettore  $\xi$  in modo tale che  $dT_z(\xi) = \frac{dT(z+t\xi)}{dt}|_{t=0}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , da cui  $dT_z(\xi) = \frac{a\xi}{cz+d} - \frac{c\xi(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{(ad-bc)\xi}{(cz+d)^2}$ .

Tenendo conto di come è stata definita  $\psi$  si ottiene:

$$v \mapsto d\psi_z(v) = \frac{v}{\left(\frac{i}{\sqrt{2}}z + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{2v}{(iz+1)^2}$$

$$w \mapsto d\psi_z(w) = \frac{w}{\left(\frac{i}{\sqrt{2}}z + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{2w}{(iz+1)^2}$$

e, dalle equazioni (1.2) e (1.4), segue

$$g_D(v, w)_z = \frac{4\text{Re}(v\bar{w})}{(1-|z|^2)^2}$$

$$g_H(d\psi(v'), d\psi(w'))_{\psi(z)} = \frac{\text{Re}(v'\bar{w}')}{\text{Im}(z')} = \frac{4\text{Re}(v\bar{w})}{(1+iz)^4} \frac{|1+iz|^4}{(1-|z|^2)^2} = 4 \frac{\text{Re}(v\bar{w})}{(1-|z|^2)^2}.$$

Si dimostra così l'equazione nella (1.7). Quest'ultima e la proprietà di essere un diffeomorfismo permettono di concludere che il disco e il semipiano di Poincaré sono tra loro isometrici.

### 1.1.2 Isometria tra $(\mathbb{R}^2, g_{hyp})$ e $(H, g_H)$

Consideriamo la mappa  $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow H$  definita da  $(u, v) \mapsto \phi(u, v) = (v, e^{-u})$ .  $\phi$  è una applicazione differenziabile, la cui inversa è ancora differenziabile. Pertanto possiamo concludere che  $\phi$  è un diffeomorfismo.

Sia

$$\langle v, w \rangle_p = \langle (d\phi)_p(v), (d\phi)_p(w) \rangle_{\phi(p)} \quad \forall v, w \in T_p H \quad (1.8)$$

la metrica indotta da  $\phi$  su  $H$ , dove  $(d\phi)_p : T_p \mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{\phi(p)} H$  per la quale

$$jac(\phi) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -e^{-u} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Se  $v = (v_1, v_2)$  e  $w = (w_1, w_2) \in T_p \mathbb{R}^2$  allora le seguenti

$$(d\phi)_p(v) = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{e} \quad (d\phi)_p(w) = \frac{\partial}{\partial y}$$

implicano che  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial v}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} = -e^u \frac{\partial}{\partial u}$  da cui

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \frac{1}{y^2} = e^{2u}, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \frac{1}{y^2}.$$

L'equazione (1.8) e la proprietà di essere un diffeomorfismo per  $\phi$ , implicano che il piano iperbolico e il semipiano di Poincaré siano isometrici.

**Teorema 1.1.** *Sia  $(S, ds^2)$  una superficie completa e semplicemente connessa, con curvatura costante, negativa. Allora  $(S, ds^2)$  è globalmente isometrica a  $(\mathbb{R}^2, g_{hyp})$ .*

**Osservazione 1.2.** Un importante risultato relativo a  $(\mathbb{R}^2, g_{hyp})$ , che sarà utile nell'ambito della dimostrazione del Teorema di Hilbert, è il fatto che la sua area sia infinita.

Ricordiamo che per una varietà  $(M, g)$ , dotata di metrica  $g = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ , si definisce  $Area(M) = \int \int \sqrt{EG - F^2} dudv$ .



Considerando la (1.5) otteniamo

$$Area(\mathbb{R}^2, g_{hyp}) = \int \int \sqrt{e^{2u}} dudv = \int \int e^u dudv = \infty. \quad (1.10)$$

# Capitolo 2

## Curve asintotiche

### 2.1 Equazione delle curve asintotiche e parametrizzazione locale asintotica

In questo capitolo consideriamo alcuni risultati sulle curve coordinate di una superficie  $M \subset \mathbb{R}^3$ .

Per i dettagli sul capitolo consultare [2, cap.2-3].

**Definizione 2.1.** Una direzione  $L$  di  $M$  in  $p \in M$  è un sottospazio unidimensionale dello spazio tangente  $T_pM$ .

**Definizione 2.2.** Sia  $v \in T_pM$ . Definiamo curvatura normale di  $M$  nella direzione di  $v$ , la seguente

$$K_N(v) = \frac{\langle S_p(v), v \rangle}{\langle v, v \rangle} \quad (2.1)$$

dove  $S_p : T_pM \rightarrow T_pM$  è l'operatore di forma ed  $N$  è il vettore normale unitario ad  $M$  in  $p$ .

**Definizione 2.3.** Sia  $p$  un punto di  $M$ . Una direzione asintotica di  $M$  in  $p$  è una direzione dello spazio tangente lungo la quale la curvatura normale è nulla.

**Definizione 2.4.** Una curva  $\alpha : I \rightarrow M$  è asintotica se per ogni  $p \in \alpha(I)$  e per ogni  $v$  tangente ad  $\alpha$  in  $p$  la retta generata da  $v$  è una direzione asintotica.

**Lemma 2.5.** *Sia  $\alpha$  una curva asintotica contenuta nell'immagine di una parametrizzazione locale  $X$  di una superficie  $M$ . Poniamo  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ , allora queste due condizioni sono tra loro equivalenti:*

1.  $e(\alpha(t))\dot{u}(t)^2 + 2f(\alpha(t))\dot{u}(t)\dot{v}(t) + g(\alpha(t))\dot{v}(t)^2 = 0$  per ogni  $t$
2.  $II(\dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t)) = 0$

con  $e, f, g$  coefficienti della seconda forma fondamentale  $II$ .

*Dimostrazione.* Se  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  si ha  $\dot{\alpha}(t) = X_u\dot{u} + X_v\dot{v}$ . Sostituendo  $\dot{\alpha}(t)$  nella (2.1) ed eseguendo i calcoli si ottiene :

$$k_N(\dot{\alpha}(t)) = \frac{e(\alpha(t))\dot{u}^2 + 2f(\alpha(t))\dot{u}\dot{v} + g(\alpha(t))\dot{v}^2}{E(\alpha(t))\dot{u}^2 + 2F(\alpha(t))\dot{u}\dot{v} + G(\alpha(t))\dot{v}^2} \quad (2.2)$$

da cui segue la tesi.

**Osservazione 2.6.** Dall'equazione (2.2) segue che l'equazione di una curva asintotica è data dalla seguente:

$$e\dot{u}^2 + 2f\dot{u}\dot{v} + g\dot{v}^2 = 0 \quad (2.3)$$

**Definizione 2.7.** Una parametrizzazione locale asintotica su una superficie regolare  $M \subset \mathbb{R}^3$  è una parametrizzazione locale per la quale le linee coordinate sono curve asintotiche per  $M$ .

**Teorema 2.8.** *Sia  $X$  una parametrizzazione locale per la quale  $f \neq 0$ . Allora  $X$  è una parametrizzazione locale asintotica se e solo se  $e = g = 0$ .*

*Dimostrazione.*( $\implies$ ) Se  $X$  è una parametrizzazione locale asintotica allora per la (2.2) si ha :

per  $(u_0, v(t))$ ,  $u_0 \in \mathbb{R}$ , la (2.3) implica che  $g(\dot{v}^2) = 0$  da cui  $g = 0$ ;

per  $(u(t), v_0)$ ,  $v_0 \in \mathbb{R}$ , la (2.3) implica che  $e(\dot{u}^2) = 0$  da cui  $e = 0$ .

( $\impliedby$ ) Se  $e = g = 0$  dalla (2.3) si ricava  $2f\dot{u}\dot{v} = 0$  da cui  $f\dot{u}\dot{v} = 0$ .

Per cui le curve coordinate parametrizzate da  $(u_0, v(t))$  e  $(u(t), v_0)$  sono soluzione dell'equazione (2.3).

## 2.2 Punti iperbolici e curve asintotiche

Ricordiamo che un punto  $p \in M \subset \mathbb{R}^3$  è detto iperbolico se  $K_p < 0$ , dove  $K_p$  denota la curvatura di Gauss di  $M$  in  $p$ .

**Teorema 2.9.** *In un intorno di un punto iperbolico  $p \in M$  esistono due famiglie di curve asintotiche.*

*Dimostrazione.* Sia  $X$  una parametrizzazione di  $M$  per la quale poniamo  $p = \mathbf{X}(u_0, v_0)$  e  $v \in T_p M$  tale che  $v = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0)$ . Affinchè  $v$  rappresenti una direzione asintotica, per la Definizione 2.3 e per l'equazione (2.1) si deve avere

$$ea^2 + 2fab + gb^2 = 0. \quad (2.4)$$

Tenendo presente le formule che esprimono i coefficienti della seconda forma fondamentale  $e, f, g$ , e ponendo

$$\tilde{e} = \det \begin{pmatrix} X_{uu} \\ X_u \\ X_v \end{pmatrix} \quad \tilde{f} = \det \begin{pmatrix} X_{uv} \\ X_u \\ X_v \end{pmatrix} \quad \tilde{g} = \det \begin{pmatrix} X_{vv} \\ X_u \\ X_v \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

l'equazione (2.4) diventa

$$\tilde{e}a^2 + 2\tilde{f}ab + \tilde{g}b^2 = 0. \quad (2.6)$$

In un intorno di un punto iperbolico  $p$  l'equazione (2.6) ammette radici reali. Si ha pertanto una fattorizzazione

$$\tilde{e}a^2 + 2\tilde{f}ab + \tilde{g}b^2 = (Aa + Bb)(Cc + Dd)$$

dove  $A, B, C, D$  sono funzioni reali.

L'equazione differenziale (2.3) può essere riscritta nella forma seguente:

$$(A\dot{u} + B\dot{v})(C\dot{u} + D\dot{v}) = 0.$$

Una famiglia di curve asintotiche è rappresentata dalle curve soluzione di  $(A\dot{u} + B\dot{v}) = 0$  e l'altra dalle curve soluzione di  $(C\dot{u} + D\dot{v}) = 0$ .

Dal Teorema 2.8 seguono i corollari:

**Corollario 2.10.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché in un punto iperbolico le curve coordinate siano asintotiche è  $e = g = 0$ .*

**Corollario 2.11.** *Sia  $p \in M$ , un punto iperbolico. Allora è possibile ri-parametrizzare un intorno di  $p$  in modo tale che le curve coordinate di tale parametrizzazione siano curve asintotiche.*

## 2.3 La rete di Tchebyshef

Sia  $(M, g)$  una varietà di dimensione 2.

**Definizione 2.12.** Le curve coordinate di una parametrizzazione  $X(u, v)$  per la varietà costituiscono una rete di Tchebyshef se i lati opposti di un qualunque quadrilatero, formato da essi, hanno lunghezza uguale .

**Proposizione 2.13.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché le curve coordinate formino una rete di Tchebyshef è che :*

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$

**Lemma 2.14.** *Se in  $p \in M$  le curve coordinate di una parametrizzazione  $X(u, v)$  di  $M$  costituiscono una rete di Tchebyshef, allora è possibile riparametrizzare un intorno di  $p$  in modo tale che  $E = 1$  ,  $F = \cos \theta$  ,  $G = 1$ , dove  $\theta$  sarà l'angolo formato dalle curve coordinate.*

*Dimostrazione.* Siano  $E, F, G$  i coefficienti della prima forma fondamentale per una parametrizzazione  $X(u, v)$  . Indichiamo con  $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$  i coefficienti relativi ad una riparametrizzazione locale di  $M$ ,  $\bar{X}(\bar{u}, \bar{v})$ .

Il cambiamento di coordinate, espresso da  $\bar{X}(\bar{u}, \bar{v}) = X(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$ , porta ad avere:

$$\begin{aligned}\bar{E} &= E \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \right)^2 + G \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right)^2 + 2F \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\ \bar{G} &= E \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right)^2 + G \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right)^2 + 2F \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \\ \bar{F} &= E \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + G \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} + F \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} + F \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}.\end{aligned}$$

Per la Proposizione 2.13 si ha:

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{v}} = 0 \implies \bar{E} = E(u)$$

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{u}} = 0 \implies \bar{G} = G(v)$$

Definiamo  $\bar{u} = \int(\sqrt{\bar{E}}du)$  e  $\bar{v} = \int(\sqrt{\bar{G}}dv)$ .

Allora le equazioni (2.3) diventano:

$$\bar{E} = E \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \right)^2 = E \left( \frac{1}{E} \right) = 1$$

$$\bar{G} = G \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right)^2 = G \left( \frac{1}{G} \right) = 1$$

$$\bar{F} = F \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} = F \left( \frac{1}{\sqrt{EG}} \right) = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \cos \theta.$$

L'ultima uguaglianza segue dal fatto che se  $\theta$  è l'angolo compreso tra  $X_u$  e  $X_v$  allora

$$\cos \theta = \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{\|X_u\| \|X_v\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}. \quad (2.7)$$

Se le curve coordinate formano una rete di Tchebyshef la curvatura sezionale è data dalla seguente formula:

$$K = -\frac{\theta_{uv}}{\sin \theta}. \quad (2.8)$$

**Corollario 2.15.** *Sia  $M \subset \mathbb{R}^3$ , una superficie completa con curvatura di Gauss costante e negativa. Allora per ogni punto  $p \in M$  esiste una parametrizzazione locale  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  in cui le curve coordinate sono asintotiche e formano una rete di Tchebyshef. Inoltre l'area di un qualunque quadrilatero formato da tali curve è più piccola di  $2\pi$ .*

*Dimostrazione.* Osserviamo preliminarmente che possiamo assumere  $K = -1$ , in quanto esiste un'immersione di  $(S, ds^2)$  in  $\mathbb{R}^3$  se e solo se esiste un'immersione di  $(S, cds^2)$  in  $\mathbb{R}^3$  per ogni  $c > 0$ . Poichè  $K(p) < 0$  per ogni  $p \in X(U) = V$ , per il Corollario 2.11 possiamo riparametrizzare un intorno di  $p$ ,  $V'$ , in modo tale che le curve coordinate siano curve asintotiche. Inoltre dal Corollario 2.10 segue  $e = g = 0$ , con  $e$  e  $g$  coefficienti della seconda

forma fondamentale di  $M$ . In  $V'$  si ha:  $K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{N_u \wedge N_v}{X_u \wedge X_v}$  da cui  $N_u \wedge N_v = K(X_u \wedge X_v)$ ;  $N = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}$  da cui  $X_u \wedge X_v = ND$  ponendo  $\sqrt{EG - F^2} = D$ .

$N_u \wedge N_v = KND$  può essere riscritta come  $(N \wedge N_v)_u - (N \wedge N_u)_v = 2(N_u \wedge N_v) = 2KDN$ .

Tenendo conto delle seguenti uguaglianze:

$$N \wedge N_u = \frac{X_u \wedge X_v}{D} \wedge N_u = \frac{1}{D} [(X_u \wedge X_v) \wedge N_u] = \frac{1}{D} [\langle X_u, N_u \rangle X_v -$$

$$\langle X_v, N_u \rangle X_u] = \frac{1}{D}(fX_u - eX_v) \quad \text{e} \quad N \wedge N_v = \frac{X_u \wedge X_v}{D} \wedge N_v = \frac{1}{D}[(X_u \wedge X_v) \wedge N_v] = \frac{1}{D}[\langle X_u, N_v \rangle X_v - \langle X_v, N_v \rangle X_u] = \frac{1}{D}(gX_u - fX_v)$$

e del fatto che per le nostre ipotesi,  $K = -1$ , si ricava  $-\frac{f^2}{D^2} = -1$  da cui  $\frac{f}{D} = \pm 1$ .

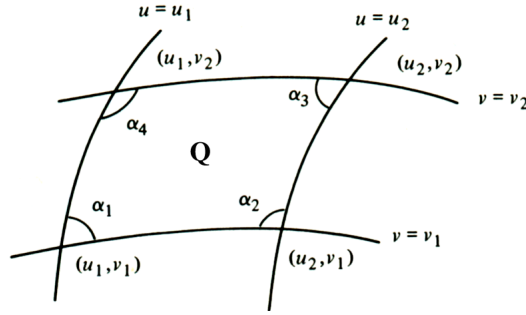
$$\text{Segue: } N \wedge N_u = \frac{1}{D}(fX_u) = \pm X_u \quad \text{e} \quad N \wedge N_v = \frac{1}{D}(-fX_v) = \mp X_v.$$

$$2KDN = 2(-1)DN = \mp X_{vu} - \pm X_{uv} = \mp X_{vu} \mp X_{uv} = \pm X_{uv}.$$

$KDN = \pm X_{uv}$  implica che  $N$  è parallelo a  $X_{uv}$ .

Ma allora da  $E = \langle X_u, X_u \rangle$  segue  $E_v = 2 \langle X_{uv}, x_u \rangle = 0$ , e da  $G = \langle X_v, X_v \rangle$  si ha  $G_u = 2 \langle X_{vu}, X_v \rangle = 0$ .

Poichè vale la Proposizione 2.13, segue la tesi della prima parte del corollario. Poichè le curve coordinate sono asintotiche e formano una rete di Tchebyshef, per il Lemma 2.14, possiamo riparametrizzare un intorno di  $p$  in modo tale che  $E = 1$ ,  $F = \cos \theta$ ,  $G = 1$ . Sia  $Q$  il quadrilatero formato da tali curve. Calcoliamo l'area di  $Q$ , tenendo conto che dall'equazione (2.8), per  $K = -1$ , si ricava  $\theta_{uv} = \sin \theta$ .



$$\begin{aligned} A(Q) &= \int_Q \sqrt{1 - \cos^2 \theta} dudv = \int_Q \sin \theta dudv = \int_Q \theta_{uv} = \\ &= \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \theta_{uv} dudv = \theta(u_1, v_1) - \theta(u_2, v_2) + \theta(u_2, v_2) - \theta(u_1, v_2) \\ &= \alpha_1 + \alpha_3 - (\pi - \alpha_2) - (\pi - \alpha_4) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i - 2\pi < 2\pi. \end{aligned}$$

# Capitolo 3

## Applicazione esponenziale e Teorema di Hadamard

In questo capitolo ricordiamo la definizione di mappa esponenziale e dimostriamo il Teorema di Hadamard. Per maggiori dettagli consultare [2] e [3].

### 3.1 Definizione e prime proprietà

Sia  $M \in \mathbb{R}^3$  una superficie regolare e  $p \in M$ .

Definiamo l'applicazione esponenziale

$$\exp_p : T_p M \longrightarrow M, v \longmapsto \exp_p(v) = \gamma(1, p, v) \quad (3.1)$$

la quale associa ad un vettore fissato  $v \in T_p M$ , un punto di  $M$ , ottenuto valutando la geodetica  $\gamma : I \in \mathbb{R} \longrightarrow M$

1.  $\gamma(0) = p$
2.  $\dot{\gamma}(0) = v$

per il valore del parametro  $t = 1, t \in I$ .

L'esponenziale è una applicazione che gode delle seguenti proprietà:

1. è differenziabile
2. è iniettiva se ristretta ad un aperto

$$B_\varepsilon(0) = \{v \in T_p M : \|v\| < \varepsilon\} \subset T_p M, \quad (3.2)$$

con  $\varepsilon > 0$ , scelto opportunamente.



Diamo ora la definizione di distanza tra due punti,  $p$  e  $q$ , su una superficie  $M$ . Sia  $l(\alpha)$  la lunghezza di una qualunque curva  $\alpha$  in  $M$ , differenziabile a tratti, congiungente  $p$  con  $q$ , allora:

**Definizione 3.1.** La distanza  $d(p, q)$  dal punto  $p$  al punto  $q$  è data da  $d(p, q) = \inf l(\alpha)$ .

**Teorema 3.2** (Hopf-Rinow).

*Una superficie  $M$  è completa (come spazio metrico con la distanza definita sopra) se e solo se per ogni  $p \in M$  l'applicazione  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  è definita su tutto lo spazio tangente.*

Per la dimostrazione del Teorema di Hopf-Rinow si faccia riferimento al [2, cap.5, pag.333,], o al [1, cap.7, pag.343,] oppure al [3, cap.7, pag.146, ].

Richiamiamo ora delle importanti nozioni che saranno utili in seguito per la comprensione della dimostrazione del fatto che la mappa esponenziale sia un diffeomorfismo.

**Proposizione 3.3.** *L'applicazione esponenziale è un diffeomorfismo locale, cioè per ogni punto  $p \in M$  esiste un aperto  $U \subset T_p M$  tale che  $(\exp_p)|_U : U \rightarrow \exp_p U$  sia un diffeomorfismo.*

*Dimostrazione.* Sia  $B_\varepsilon(0)$  definita come nella (3.2), allora  $\exp_p : B_\varepsilon(0) \subseteq T_p M \rightarrow M$  è ben definita. Per dimostrare la proposizione resta da far vedere che il differenziale  $(d\exp_p)_0 : T_0 T_p M \simeq T_p M \rightarrow T_p M$ ,  $v \mapsto (d\exp_p)_0(v)$ , è un isomorfismo di spazi vettoriali. Infatti la conclusione seguirà dal teorema della funzione inversa.

Sia  $\alpha(t) = tv \in B_\varepsilon(0)$ , tale che

1.  $\alpha(0) = 0$
2.  $\dot{\alpha}(0) = v$ .

Allora  $(d\exp_p)_0(v) = \left[ \frac{d}{dt} \exp_p(tv) \right]_{t=0} = \left[ \frac{d}{dt} \gamma(1, p, tv) \right]_{t=0} = \left[ \frac{d}{dt} \gamma(t, p, v) \right]_{t=0} =$

$\left[ \dot{\gamma}(t, p, v) \right]_{t=0} = v$  e quindi  $(d\exp_p)_0 = id_{T_p M}$

## 3.2 Ricoprimenti

Consideriamo ora una serie di definizioni e proposizioni che serviranno per la dimostrazione del Teorema di Hadamrd.

**Definizione 3.4.** Siano  $M$  e  $N$  due varietà (di dimensione 2).

Un'applicazione  $\varphi : M \longrightarrow N$  è un ricoprimento se:

1.  $\varphi$  è un diffeomorfismo;
2.  $\varphi$  è suriettiva, cioè  $\varphi(M) = N$ ;
3. per ogni  $p \in N$  esiste un intorno  $U \subset N$  tale che  $\varphi^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$ , dove  $V_{\alpha}$  sono insiemi aperti e a due a due disgiunti, per i quali la restrizione di  $\varphi$  in  $V_{\alpha}$  sia un diffeomorfismo di  $V_{\alpha}$  in  $U$ .

**Definizione 3.5.** Sia  $\varphi : M \longrightarrow N$  un'applicazione differenziabile tra varietà e sia  $\alpha : [0, l] \subset \mathbb{R} \longrightarrow N$  una curva, ossia un arco da  $\alpha(0)$  a  $\alpha(l)$ . Un arco  $\tilde{\alpha} : [0, l] \longrightarrow M$  è detto un sollevamento di  $\alpha$  se  $\varphi(\tilde{\alpha}) = \alpha$ .

**Definizione 3.6.** Sia  $\varphi : M \longrightarrow N$  come nella definizione precedente. Diremo che  $\varphi$  ha la proprietà di sollevare gli archi se ogni arco  $\alpha : [0, l] \subset \mathbb{R} \longrightarrow N$  ammette un sollevamento.

**Proposizione 3.7.** *Sia  $\varphi : M \longrightarrow N$  un diffeomorfismo locale con la proprietà di sollevare gli archi. Allora  $\varphi$  è un ricoprimento. Se inoltre  $N$  è semplicemente connesso allora  $\varphi$  è un diffeomorfismo.*

## 3.3 Il Teorema di Hadamard

L'obiettivo di questo paragrafo riguarda la dimostrazione del fatto che sotto l'ipotesi che  $M$  sia una superficie di  $\mathbb{R}^3$ , completa e con curvatura di Gauss  $K \leq 0$ , l'applicazione esponenziale è un diffeomorfismo.

**Lemma 3.8.** *Sia  $M$  una superficie completa con curvatura di Gauss  $K \leq 0$ . L'applicazione esponenziale  $\exp_p : T_p M \longrightarrow M$ ,  $p \in M$ , è tale che se  $u, v \in T_p M$ , si ha  $\langle (d\exp_p)_u(w), (d\exp_p)_u(w) \rangle \geq \langle w, w \rangle$ .*

**Proposizione 3.9.** *Se  $M$  è una superficie completa con curvatura di Gauss  $K \leq 0$ , allora l'applicazione esponenziale  $\exp_p : T_p M \longrightarrow M$ ,  $p \in M$ , è un ricoprimento.*

*Dimostrazione.* Per la dimostrazione della proposizione, occorre semplicemente mostrare che la mappa esponenziale ha la proprietà di sollevare gli archi. In tal caso, infatti, per la Proposizione 3.7, si avrebbe che  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ ,  $p \in M$ , è un ricoprimento.

Sia  $\alpha : [0, l] \rightarrow M$  un arco in  $M$ .

Poichè  $M$  è completa, per ipotesi, esiste un  $v \in T_p M$  tale che  $\exp_p(v) = \alpha(0)$ . Inoltre, per la Proposizione 3.3, esiste un intorno  $U$  di  $v$ , in  $T_p M$ , tale che  $(\exp_p)|_U : U \rightarrow \exp_p(U)$  possiede la proprietà di sollevare gli archi. Possiamo dunque definire  $\tilde{\alpha}$  in modo tale che  $\tilde{\alpha} = \exp_p^{-1}(\alpha)$ . Consideriamo ora l'insieme  $I$ , tale che  $I = [0, t]$  dove  $t \in [0, l]$ . Un tale insieme  $I$  è non vuoto e, inoltre, se  $\tilde{\alpha}(t')$  è definito allora  $\tilde{\alpha}$  è definita in un intorno di  $t'$ . Segue che  $I$  è un insieme aperto in  $[0, l]$ .

Se si dimostra che l'insieme  $I$  è anche chiuso, poichè  $[0, l]$  è connesso, segue che  $I = [0, l]$ , da cui la tesi della proposizione.

Se  $t_0 \in [0, l]$  è un punto di accumulazione per  $I$ , allora esiste una successione  $\{t_n\}$ ,  $t_n \in I$  e  $t_n \neq t_0$ , tale che  $\{t_n\} \rightarrow t_0$ . Mostriamo che  $\tilde{\alpha}(t_n)$  ha un punto di accumulazione. Se così non fosse, preso un disco  $D \subset T_p M$ , centrato in  $\tilde{\alpha}(0)$ , esisterebbe un  $n'$  tale che  $\tilde{\alpha}(t_{n'})$  non appartiene a  $D$ . Poichè la scelta del disco è arbitraria, segue che in  $T_p M$  la distanza da  $\tilde{\alpha}(0)$  in  $\tilde{\alpha}(t_n)$  diventa arbitrariamente grande. Osserviamo dunque che, per il Lemma 3.8, si avrebbe che  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\alpha(0), \alpha(t_n)) = \infty$  e ciò contraddice il fatto che la distanza tra  $\alpha(0)$  e  $\alpha(t_0) = \lim_{t_n \rightarrow t_0} \alpha(t_n)$  è finita.

Sia  $q$  un punto di accumulazione per  $\tilde{\alpha}(t_n)$  e  $V$  un intorno di  $q$  in  $T_p M$ , tale che esiste  $n_1$  e  $\tilde{\alpha}(t_{n_1}) \in V$ . Poichè  $\alpha$  è continua, esiste un intervallo aperto  $A \subset [0, l]$ , e per  $t_0 \in A$ ,  $\alpha(A) \subset \exp_p(V) = U$ .

Se consideriamo  $(\exp_p^{-1})|_U$  possiamo definire un sollevamento di  $\alpha$  in  $A$ .

Poichè la mappa esponenziale è un diffeomorfismo locale, tale sollevamento coincide con  $\tilde{\alpha}$  in  $[0, t_0] \cap A$  ed è quindi l'estensione di  $\tilde{\alpha}$  in un intervallo contenente  $t_0$ . Segue che  $I$  è chiuso, da cui la tesi secondo cui la mappa esponenziale è un ricoprimento.

**Teorema 3.10** (Hadamard).

*Sia  $M$  una superficie semplicemente connessa, con curvatura di Gauss  $K \leq 0$ . Allora l'applicazione esponenziale  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ ,  $p \in M$ , è un diffeomorfismo.*

*Dimostrazione.* La tesi del teorema segue dalla Proposizione 3.7, in cui

sfruttiamo il risultato ottenuto dalla Proposizione 3.9, per la quale la mappa esponenziale è un ricoprimento.

# Capitolo 4

## Il Teorema di Hilbert

L'obiettivo del capitolo è la dimostrazione del seguente Teorema di Hilbert. Per ulteriori dettagli consultare il [2, pag.146].

**Teorema 4.1** (Hilbert).

*Sia  $S$  una superficie dotata di una metrica Riemanniana  $ds^2$ , rispetto alla quale  $S$  è completa e ha curvatura di Gauss costante e negativa. Allora  $S$  non può essere immersa isometricamente in  $\mathbb{R}^3$ .*

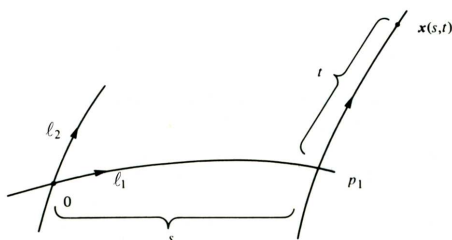
La dimostrazione del Teorema di Hilbert verrà fornita nel prossimo paragrafo. Osserviamo per il Teorema di Hadamard 3.10, e per i risultati relativi al Capitolo 1, (vedi Teorema 1.1), possiamo assumere, senza ledere le generalità, che  $(S, ds^2) = (\mathbb{R}^2, g_{hyp})$ , dove  $g_{hyp}$  è data dalla (1.5).

### 4.1 Dimostrazione del Teorema 4.1

*Supponiamo che  $S$  ammetta un'immersione isometrica in  $\mathbb{R}^3$ . Mostriamo che esiste una parametrizzazione globale  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  tale che  $X(s, t)$  è una curva asintotica, per ogni  $s$  e  $t$  fissato, rispettivamente, con ascissa curvilinea.*

*Dimostrazione.* Definiamo la mappa  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  nel modo seguente.

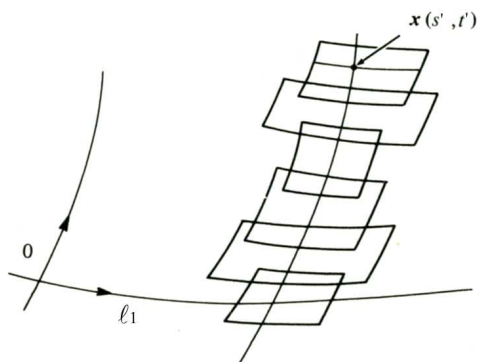
Fissato un punto  $o \in S$ , si scelgano le orientazioni per le curve asintotiche,  $l_1$  e  $l_2$ . Per ogni  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$  si prenda su  $l_1$  una lunghezza  $s$  a partire dal punto  $o$ ; sia  $p_1$  il punto così ottenuto. Per  $p_1$  passano due curve asintotiche: una sarà proprio  $l_1$ , l'altra avrà la stessa orientazione di  $l_2$ . Su questa seconda curva si prenda una lunghezza pari a  $t$ , a partire dal punto  $p$ . Sia  $X(s, t)$  il punto ottenuto su  $S$  con questa costruzione.



$X(s, t)$  è ben definito per ogni  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ .

Infatti se  $X(s, 0)$  non fosse definito, esisterebbe un  $s'$  tale che la curva  $l_1(s)$  sarebbe definita per ogni  $s < s'$  ma non per  $s = s'$ . Sia  $q = \lim_{s \rightarrow s'} l_1(s)$ .

Poichè  $S$  è completa,  $q \in S$ , e dal Corollario 2.15 seguirebbe che  $l_1(s')$  è definito. Ciò contraddice l'ipotesi iniziale fatta su  $l_1(s)$  in  $s'$ ; per cui concludiamo che  $X(s, 0)$  è definito per ogni  $s \in \mathbb{R}$ . Allo stesso modo si dimostra che  $X(0, t)$  è definita per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Per il Corollario 2.15 si ha che in ogni  $X(s', t') \in S$  esiste un intorno rettangolare, per  $t_a < t < t_b$  e  $s_a < s < s_b$ , in cui le curve asintotiche formano una rete di Tchebyshef. Se per qualche  $t_0$ ,  $t_a < t_0 < t_b$ , la curva  $X(s, t_0)$ ,  $s_a < s < s_b$ , è asintotica, allora lo stesso si può dire per le curve  $X(s, \bar{t})$ ,  $t_a < \bar{t} < t_b$ . Si osserva infatti che il punto  $X(s, t_0)$  si ottiene stendendo un segmento di lunghezza  $\bar{t}$  da  $X(s, 0)$ , che è equivalente ad un segmento di lunghezza  $\bar{t} - t_0$  steso dal punto  $X(s, t_0)$ . Le curve asintotiche in tale intorno formano una rete di Tchebyshef, e per il Corollario 2.10 segue che la curva  $X(s, \bar{t})$ ,  $t_a < \bar{t} < t_b$  è ancora asintotica. Sia  $X(s', t')$  un punto arbitrario in  $S$ . Poichè il segmento  $X(s', t)$ ,  $0 \leq t \leq t'$ , è compatto, è possibile ricoprirlo con un numero finito di intorni rettangolari, in modo tale che le curve asintotiche di ciascuno di questi formino una rete di Tchebyshef.



Per questa osservazione e poichè la curva  $X(s, 0)$  è asintotica, possiamo ripetere il ragionamento precedente, in cui però ora fissiamo  $t' \in (0, \infty)$ , per concludere che  $X(s, t')$  è una curva asintotica in un intorno di  $s'$ . Dal Lemma 2.14 e dal fatto che la scelta fatta per  $(s', t')$  è arbitraria, segue la tesi.

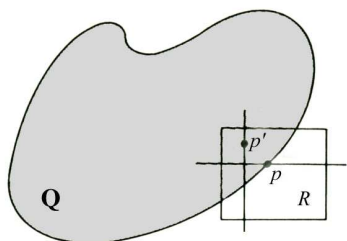
Dimostriamo che  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  è una parametrizzazione globale di  $S$ .

Dal Corollario 2.15 esiste un aperto  $U \subset \mathbb{R}^2$  tale che se  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset S$  rappresenta una parametrizzazione locale di  $S$ , rispetto alla quale valgono le condizioni del Lemma 2.14, allora la restrizione di  $X|_U$  è un diffeomorfismo. Segue che  $X$  è un diffeomorfismo locale.  $X(\mathbb{R}^2)$  è, quindi, aperto in  $S$ . Poniamo  $X(\mathbb{R}^2) = Q$ . Se  $q \in Q$  allora per tale punto passano due curve asintotiche, interamente contenute in  $Q$ .

Ragioniamo per assurdo e supponiamo che  $Q \neq S$ .  $S$  connessa implica che il  $\partial Q \neq \emptyset$ . Sia  $p \in \partial Q$ , dato che  $Q$  è aperto,  $p$  non può appartenere a  $Q$ .

Si consideri un intorno rettangolare  $R$  di  $p$ , in cui le curve asintotiche formano una rete di Tchebyshef. Preso  $p' \in Q \cap R$ , si ha che le curve asintotiche per  $p'$  sono interamente contenute in  $Q$ , poichè  $p' \in Q$ ; e una delle due interseca una di quelle passanti per  $p$ , che quindi, dovrebbe appartenere a  $Q$ .

Ciò contraddice l'ipotesi da noi fatta.



Concludiamo che  $X(\mathbb{R}^2) = S$  e quindi  $X$  è suriettiva.

In  $S$  ci sono due campi di vettori differenziabili, linearmente indipendenti, tangenti alle curve asintotiche di  $S$ . Fissato  $p \in S$ , scegliamo due vettori unitari,  $v_p$  e  $w_p$ , tangenti alle curve asintotiche per  $p$ . Se  $q \in S$  è un punto arbitrario, si consideri l'arco  $\alpha : [0, l] \rightarrow S$  in modo tale che  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha(l) = q$ .

Definiamo il campo  $V(\alpha(t))$  lungo  $\alpha$ , per  $t \in [0, l]$ , tangente ad una delle due curve asintotiche in  $p$ , in modo tale che  $V(\alpha(t))|_{t=0} = V(\alpha(0)) = v_p$ .

Definiamo il campo  $W(\alpha(t))$  lungo  $\alpha$ , per  $t \in [0, l]$ , tangente all'altra curva asintotica, in modo tale che  $W(\alpha(t))|_{t=0} = W(\alpha(0)) = w_p$ .

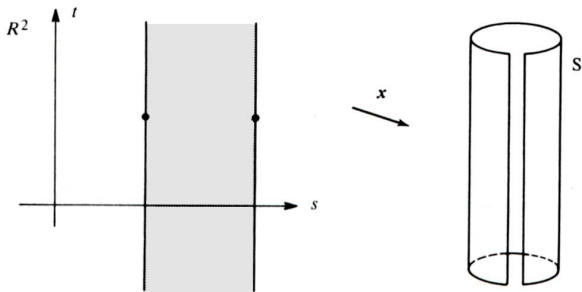
Dimostriamo che  $v_q = V(\alpha(l))$  e  $w_q = W(\alpha(l))$  non dipendono dalla scelta dell'arco congiungente i punti  $p$  e  $q$ . Consideriamo un altro arco  $\beta : [0, l] \rightarrow S$  tale che  $\beta(0) = p$  e  $\beta(l) = q$ . Poichè  $S$  è omeomorfa al piano, esiste un'omotopia tra gli archi  $\alpha$  e  $\beta$ , così definita:

$H : [0, 1] \times [0, l] \rightarrow S$ ,  $(s, t) \mapsto H(s, t)$  tale che

$H(0, t) = \alpha(t)$  per ogni  $t \in [0, l]$ ;  $H(1, t) = \beta(t)$  per ogni  $t \in [0, l]$

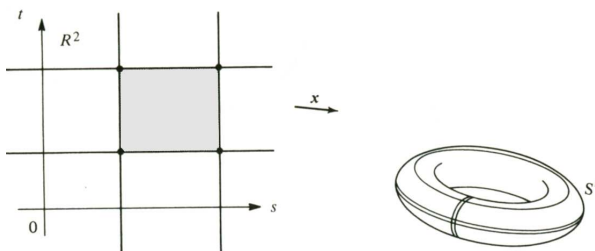
$H(s, 0) = H(s, l)$  per ogni  $s \in [0, 1]$ .

$H(s, t) = \gamma_s(t)$ , per ogni  $s \in [0, 1]$ , è una famiglia continua di archi congiungenti  $p$  e  $q$ , definita su un compatto. Dato  $\varepsilon > 0$  esiste  $\bar{s} \in [0, 1]$  tale che se  $s < \bar{s}$  allora  $|V(\gamma_s(l)) - V(\gamma_0(l))| < \varepsilon$ . Per  $\bar{s}$  piccolo quanto basta, si ha che  $V(\gamma_s(l)) = V(\gamma_0(l))$ , con  $s < \bar{s}$ . Poichè  $[0, 1]$  è compatto, possiamo ragionare così  $\forall s \in [0, 1]$ . Dunque,  $V(\alpha(l)) = V(\beta(l))$ . Con un ragionamento analogo si può concludere che  $W(\alpha(l)) = W(\beta(l))$ . Come campi di vettori continui e tangenti alle curve asintotiche,  $V$  e  $W$  sono differenziabili. Concludiamo la dimostrazione, verificando che  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  è anche iniettiva. Supponiamo che  $X(s_0, t_0) = X(s_1, t_0)$ ,  $s_0 < s_1$ . Una curva asintotica, in  $S$ , non può autointersecarsi se le linee tangenti hanno un punto d'intersezione. Poichè  $X$  è un diffeomorfismo locale, esiste un  $\varepsilon > 0$  tale che  $X(s_0, t) = X(s_1, t)$ , per  $t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$ . Segue che i punti della curva  $X(s_0, t)$  formano un insieme che è aperto e chiuso, quindi  $X(s_0, t) = X(s_1, t)$ , per ogni  $t$ . Risulta anche che, per  $0 \leq a \leq s_1 - s_0$ ,  $X(s_0 + a, t_0) = X(s_1 + a, t_0)$ ; da cui, per le considerazioni precedenti, segue che  $X(s_0 + a, t) = X(s_1 + a, t)$ . Distinguiamo due casi: se  $X(s_0, t_0) \neq X(s_0, t)$ , per ogni  $t > t_0$ ,  $X$  rappresenterebbe ogni striscia di  $\mathbb{R}^2$ , compresa tra due linee verticali, su  $S$ , identificando punti di tali linee che hanno la stessa  $t$ .  $X$  sarebbe omeomorfa ad un cilindro, il che è una contraddizione.





Se fosse  $X(s_0, t_0) = X(s_0, t_1)$  per un  $t_1 > t_0$ , risulterebbe allora  $X(s, t_0 + b) = X(s, t_1 + b)$ , per  $0 \leq b \leq t_1 - t_0$  e per ogni  $s$ .  $X$  rappresenterebbe ogni quadrato di  $\mathbb{R}^2$  con i lati distanti  $s_1 - s_0$  e  $t_1 - t_0$ , rispettivamente, su  $S$ , identificando i punti corrispondenti nelle parti opposte del bordo.



$X$  sarebbe omeomorfa ad un toro, il che è una contraddizione.

Se ora si ripete lo stesso ragionamento fatto fino ad adesso, con l'ipotesi che  $X(s_0, t_0) = X(s_0, t_1)$ , per  $t_1 > t_0$ , si arriva ad una stessa contraddizione.

Consideriamo ora il caso in cui sia  $X(s_0, t_0) = X(s_1, t_1)$ , con  $s_1 > s_0$  e  $t_1 > t_0$ . Poichè  $X$  è un diffeomorfismo locale, rappresenterebbe, su  $S$ , una striscia di  $\mathbb{R}^2$  tra due linee perpendicolari al vettore  $(s_1 - s_0, t_1 - t_0)$ , e distanti  $\sqrt{(s_1 - s_0)^2 + (t_1 - t_0)^2}$ .

Con un ragionamento analogo a quello precedente,  $S$  risulterebbe ancora omeomorfa ad un cilindro o ad un toro, rispettivamente. Da tali contraddizioni segue che  $X$  è iniettiva.

**Conclusione della dimostrazione del Teorema 4.1.** Assumiamo che  $(S, ds^2) = (\mathbb{R}^2, g_{hyp})$  possa essere immersa isometricamente in  $\mathbb{R}^3$ . Per ciò che si è appena dimostrato esisterebbe una parametrizzazione  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , globale di  $S$ , tale che per ogni punto  $p \in S$  esisterebbe un intorno rettangolare costituito da curve coordinate che sarebbero asintotiche e parametrizzate con ascissa curvilinea. Quindi le curve coordinate formerebbero una rete di Tchebyshef e quindi, per il Corollario 2.15, tale intorno rettangolare avrebbe area minore di  $2\pi$ . Poichè sarebbe possibile ricoprire  $S = \mathbb{R}^2$  con un'unione di quadrilateri,  $Q_n$ , costituiti da curve asintotiche, tali che  $Q_n \subset Q_{n+1}$  si otterrebbe la contraddizione:  $+\infty = A(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(Q) < +\infty$ .

# Bibliografia

- [1] W.M. Boothby. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry, second edition*, Academic Press, 1986.
- [2] M.P. Docarmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, 1976.
- [3] M.P. Docarmo. *Riemannian Geometry*, Birkähuser, 1979.
- [4] M.L. Gromov. *Isometric embeddings and immersions*, Dokl. Akad. Nauk 192, 1970, 1206-1209.
- [5] C. Kosniowski. *Introduzione alla topologia algebrica*, Zanichelli, 1988.
- [6] J. Nash. *The embedding problem for Riemannian manifolds*, Ann. of Math. (2) 63, 1956, 20-63.
- [7] E.G. Poznyak. *Regular realization in the large of two-dimensional metric of alternating curvature*, Third All-Union Symposium on Geometry in the Large (abstracts), Petrozavodsk, 1969, 55-56.