



**Università degli Studi di Cagliari**

---

FACOLTÀ DI SCIENZE  
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

## **Il Teorema di Gauss-Bonnet**

Candidato:  
**Chiara Leo**

Relatore:  
**Prof. Andrea Loi**

---

Anno Accademico 2017-2018



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Forme differenziali e integrazione su varietà</b>	<b>3</b>
1.1 Algebra esterna . . . . .	3
1.2 Forme differenziali . . . . .	11
1.3 Integrazione su varietà . . . . .	14
<b>2 Teorema di Stokes</b>	<b>19</b>
2.1 La derivata esterna . . . . .	19
2.2 Coomologia di De Rham . . . . .	24
2.3 Teorema di Stokes . . . . .	29
<b>3 Il teorema di Gauss-Bonnet</b>	<b>33</b>
3.1 Integrazione e grado . . . . .	33
3.2 Il Teorema di Gauss-Bonnet . . . . .	38
<b>Bibliografia</b>	<b>45</b>



# Introduzione

Data un'ipersuperficie  $X$  compatta di dimensione pari in  $\mathbf{R}^{k+1}$ , il teorema di Gauss-Bonnet descrive un sorprendente legame tra la curvatura  $\kappa$  di  $X$  dotata della metrica indotta da  $\mathbf{R}^{k+1}$  e  $\chi(X)$ , la caratteristica di Eulero di  $X$ .

Più precisamente vale il seguente teorema.

**Teorema di Gauss-Bonnet:** Se  $X$  è una ipersuperficie compatta, di dimensione pari in  $\mathbf{R}^{k+1}$ , allora

$$\int_X \kappa \, v_X = \frac{1}{2} \gamma_k \chi(X)$$

dove  $\chi(X)$  è la caratteristica di Eulero di  $X$  e la costante  $\gamma_k$  è il volume della  $k$ -sfera unitaria  $S^k$ .

Lo scopo di questa tesi è fornire una dimostrazione di questo teorema usando la teoria delle forme differenziali.

La tesi è organizzata come segue. Il primo capitolo tratta le forme differenziali come strumento fondamentale per l'integrazione su varietà differenziabili.

Nel secondo capitolo, dopo aver introdotto la derivata esterna e la coomologia di De Rham, si fornisce una dimostrazione del teorema di Stokes che lega un integrale sulla varietà ad un integrale sul suo bordo.

Il terzo capitolo è dedicato alla dimostrazione del teorema di Gauss-Bonnet. Nel primo paragrafo vengono descritti i legami tra la teoria dell'integrazione e la teoria del grado, che vengono poi utilizzati nel secondo paragrafo per la dimostrazione del teorema di Gauss-Bonnet attraverso il teorema di Hopf-Poincaré, che lega gli indici di un campo di vettori con zeri isolati su una varietà  $X$  compatta con la caratteristica di Eulero della varietà.



# Capitolo 1

## Forme differenziali e integrazione su varietà

### 1.1 Algebra esterna

Un  $p$ -tensore su  $V$  è una funzione a valori reali  $T$  sul prodotto cartesiano

$$V^p = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{p \text{ volte}},$$

che è separatamente lineare in ciascuna variabile, o *multilineare*. Cioè, mantenendo tutte le variabili costanti tranne la  $j$ -esima, abbiamo la condizione usuale di linearità

$$T(v_1, \dots, v_j + av'_j, \dots, v_p) = T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_p) + aT(v_1, \dots, v'_j, \dots, v_p).$$

In particolare, un 1-tensore è semplicemente una funzione lineare su  $V$ . Un tensore di dimensione 2 che ci è familiare è il prodotto scalare in  $\mathbf{R}^k$ . Su  $\mathbf{R}^k$  conosciamo anche un  $k$ -tensore, il determinante. Tutti i  $k$ -vettori  $v_1, \dots, v_k$  possono essere organizzati come matrici  $k \times k$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_k \end{pmatrix},$$

e il determinante di questa matrice è multilineare rispetto ai vettori riga; si denota con  $\det(v_1, \dots, v_k)$ .

Siccome somme e prodotti scalari di funzioni multilineari sono ancora multilineari, l'insieme di tutti i  $p$ -tensori forma uno spazio vettoriale  $I^p(V^*)$ , dove

4CAPITOLO 1. FORME DIFFERENZIALI E INTEGRAZIONE SU VARIETÀ

$V^* = \{f : V \rightarrow \mathbf{R}, f \text{ lineare}\}$  è il duale di  $V$ . Si noti che  $I^1(V^*) = V^*$ .

Due tensori possono essere moltiplicati tra loro in un modo semplice: se  $T$  è un  $p$ -tensore e  $S$  è un  $q$ -tensore, definiamo il  $(p + q)$ -tensore  $T \otimes S$  attraverso la formula

$$T \otimes S(v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+q}) = T(v_1, \dots, v_p) \cdot S(v_{p+1}, \dots, v_{p+q}).$$

$T \otimes S$  è chiamato *tensore prodotto* di  $T$  con  $S$ . Si noti che il prodotto tra tensori non è commutativo, quindi

$$T \otimes S \neq S \otimes T,$$

ma è facile verificare che è associativo e distributivo rispetto all'addizione.

**Teorema 1.1.1** Sia  $\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$  una base per  $V^*$ .

Allora i  $p$ -tensori  $\{\phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_p} : 1 \leq i_1, \dots, i_p \leq k\}$  formano una base per  $I^p(V^*)$ . Quindi,  $\dim I^p(V^*) = k^p$ .

**Dimostrazione:** Durante la dimostrazione useremo la seguente notazione.

Sia  $I = (i_1, \dots, i_p)$  una sequenza di numeri interi compresi tra 1 e  $k$  e sia

$$\phi_I = \phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_p}.$$

Sia  $\{v_1, \dots, v_k\}$  la base duale in  $V$ , e chiamo  $v_I$  la sequenza  $(v_{i_1}, \dots, v_{i_p})$ . Dalla definizione, se  $I$  e  $J$  sono due di queste sequenze di indici,  $\phi_I(v_J)$  è 1 se  $I = J$  e 0 se  $I \neq J$ . E' chiaro, data la multilinearità, che due  $p$ -tensori  $T$  e  $S$  siano uguali se e solo se  $T(v_J) = S(v_J)$  per ognuna di queste sequenze  $J$ . Quindi se ci viene dato  $T$ , il tensore

$$S = \sum_J T(v_J) \phi_J$$

deve essere uguale a  $T$ ; quindi  $\{\phi_I\}$  genera  $I^p(V^*)$ . Gli  $\phi_I$  sono anche indipendenti, allora se

$$S = \sum_I a_I \phi_I = 0$$

si ha

$$0 = S(v_J) = a_J, \quad \text{per ogni } J.$$

□

Un tensore  $T$  è *alternante* se il segno di  $T$  cambia quando scambio due variabili:

$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_p) = -T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_p).$$



Automaticamente tutti gli 1-tensori sono alternanti. Anche il determinante è alternante, mentre il prodotto scalare no.

E' utile riformulare leggermente questa condizione. Sia  $S_p$  il gruppo di permutazioni dei numeri da 1 a  $p$ . Ricordiamo che una permutazione  $\pi \in S_p$  è detta *pari* o *dispari*, a seconda che si tratti di un prodotto di un numero pari o dispari di trasposizioni.  $(-1)^\pi$  può essere  $+1$  o  $-1$  a seconda che  $\pi$  sia pari o dispari. Per un  $p$ -tensore  $T$  e  $\pi \in S_p$ , definiamo un altro  $p$ -tensore  $T^\pi$  come

$$T^\pi(v_1, \dots, v_p) = T(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p)}).$$

Quindi, chiaramente, i  $p$ -tensori alternanti sono quelli che soddisfano

$$T^\pi = (-1)^\pi T$$

per ogni  $\pi \in S_p$ .

Si noti che  $(T^\pi)^\sigma = T^{\pi \circ \sigma}$  vale sempre.

C'è una procedura standard per creare tensori alternanti partendo da quelli arbitrari. Se  $T$  è un  $p$ -tensore, definisco un nuovo tensore  $Alt(T)$  come

$$Alt(T) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} (-1)^\pi T^\pi.$$

Si noti che  $Alt(T)$  è effettivamente alternante, poiché è ovvio che  $(-1)^{\pi \circ \sigma} = (-1)^\pi (-1)^\sigma$ . Quindi

$$[Alt(T)]^\sigma = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} (-1)^\pi (T^\pi)^\sigma = \frac{1}{p!} (-1)^\sigma \sum_{\pi \in S_p} (-1)^{\pi \circ \sigma} T^{\pi \circ \sigma}.$$

Ponendo  $\tau = \pi \circ \sigma$ , allora, siccome  $S_p$  è un gruppo,  $\tau$  varia in  $S_p$  nello stesso modo in cui  $\pi$  varia in  $S_p$ . Dunque

$$[Alt(T)]^\sigma = (-1)^\sigma \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in S_p} (-1)^\tau T^\tau = (-1)^\sigma Alt(T),$$

come affermato. Osserviamo inoltre che se  $T$  è già alternante, allora  $Alt(T) = T$ , perchè  $(-1)^\pi T^\pi = T$  per ogni  $\pi \in S_p$  e ci sono esattamente  $p!$  permutazioni in  $S_p$ .

Poiché somme e prodotti scalari di funzioni alternanti continuano ad essere alternanti, i  $p$ -tensori alternanti formano un sottospazio vettoriale  $\Lambda^p(V^*)$  di  $I^p(V^p)$ . Purtroppo, il prodotto tensoriale di tensori alternanti non è alternante, ma qui può essere utile l'operatore  $Alt$ . Se  $T \in \Lambda^p(V^*)$  e  $S \in \Lambda^q(V^*)$ , definiamo il loro prodotto esterno

$$T \wedge S \in \Lambda^{p+q}(V^*)$$

come  $Alt(T \otimes S)$ . Il prodotto esterno soddisfa chiaramente la proprietà distributiva sia sull'addizione e che sulla moltiplicazione scalare, poiché  $Alt$  è un'operazione lineare, mentre dimostrare la validità della proprietà associativa richiederà un po' di lavoro. Abbiamo bisogno di un lemma.

**Lemma 1.1.2** *Se  $Alt(T) = 0$ , allora  $T \wedge S = 0 = S \wedge T$ .*

**Dimostrazione:** Definisco  $G$  sottogruppo di  $S_{p+q}$  come l'insieme di tutte le permutazioni di  $(1, \dots, p+q)$  che lasciano fissati  $p+1, \dots, p+q$ . Attraverso la corrispondenza tra  $G$  e  $S_p$ , che assegna ad ogni  $\pi \in G$  la permutazione  $\pi' \in S_p$  indotta dalla limitazione di  $\pi$  a  $(1, \dots, p)$ , posso dire che  $S_{p+q}$  trasporta la copia naturale di  $S_p$ .

Si noti che  $(T \otimes S)^\pi = T^{\pi'} \otimes S$ , e  $(-1)^\pi = (-1)^{\pi'}$ . Quindi

$$\sum_{\pi \in G} (-1)^\pi (T \otimes S)^\pi = \left[ \sum_{\pi' \in S_p} (-1)^{\pi'} T^{\pi'} \right] \otimes S = Alt(T) \otimes S = 0.$$

Ora, un sottogruppo  $G$  decompone  $S_{p+q}$  in un'unione disgiunta di classi laterali destre  $G \circ \sigma = \{\pi \circ \sigma : \pi \in G\}$ . Ma per ogni tale classe laterale si ha

$$\sum_{\pi \in G} (-1)^{\pi \circ \sigma} (T \otimes S)^{\pi \circ \sigma} = (-1)^\sigma \left[ \sum_{\pi \in G} (-1)^\pi (T \otimes S)^\pi \right]^\sigma = 0.$$

Poiché  $T \wedge S = Alt(T \otimes S)$  è la somma di queste sommatorie parziali sulle classe laterali destre di  $G$ , si ha  $T \wedge S = 0$ . Allo stesso modo,  $S \wedge T = 0$ .  $\square$

**Teorema 1.1.3** *Il prodotto esterno è associativo, cioè*

$$(T \wedge S) \wedge R = T \wedge (S \wedge R),$$

*ciò giustifica la notazione  $T \wedge S \wedge R$ .*

**Dimostrazione:** Vogliamo dimostrare che  $(T \wedge S) \wedge R$  è uguale a  $Alt(T \otimes S \otimes R)$ . Per definizione,

$$(T \wedge S) \wedge R = Alt((T \wedge S) \otimes R),$$

quindi la linearità di  $Alt$  implica

$$(T \wedge S) \wedge R - Alt(T \otimes S \otimes R) = Alt([T \wedge S - T \otimes S] \otimes R).$$

Dato che  $T \wedge S$  è alternante,

$$Alt(T \wedge S - T \otimes S) = Alt(T \wedge S) - Alt(T \otimes S) = T \wedge S - T \wedge S = 0.$$

Quindi il lemma implica che

$$\text{Alt}([T \wedge S - T \otimes S] \otimes R) = 0.$$

Similmente si dimostra

$$T \wedge (S \wedge R) = \text{Alt}(T \otimes S \otimes R).$$

□

La formula  $T \wedge S \wedge R = \text{Alt}(T \otimes S \otimes R)$ , ricavata dalla dimostrazione precedente, si può ovviamente estendere per mettere in relazione il prodotto esterno e quello tensoriale di un qualsiasi numero di tensori. Possiamo usarla per ricavare una base per  $\Lambda^p(V^*)$ . Perché se  $T$  è un  $p$ -tensore, possiamo scrivere

$$T = \sum t_{i_1, \dots, i_p} \phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_p},$$

dove  $\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$  è una base per  $V^*$ , e la somma varia su tutte le sequenze di indici  $(i_1, \dots, i_p)$  per cui ogni indice è compreso tra 1 e  $k$ . Se  $T$  è alternante, allora  $T = \text{Alt}(T)$ , quindi

$$T = \sum t_{i_1, \dots, i_p} \text{Alt}(\phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_p}) = \sum t_{i_1, \dots, i_p} \phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_p}.$$

D'ora in poi indicheremo i tensori alternanti  $\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi_{i_p}$  con  $\phi_I$ , dove  $I = (i_1, \dots, i_p)$ .

Abbiamo mostrato che  $\phi_I$  genera  $\Lambda^p(V^*)$ ; tuttavia, a causa di una proprietà fondamentale del prodotto esterno, i tensori  $\phi_I$  non sono indipendenti. Supponiamo che  $\phi$  e  $\psi$  siano dei funzionali lineari su  $V$ , con  $\phi, \psi \in \Lambda^1(V^*)$ . In questo caso, l'operatore  $\text{Alt}$  assume una forma molto semplice:

$$\phi \wedge \psi = \frac{1}{2}(\phi \otimes \psi - \psi \otimes \phi).$$

Si osservi che  $\phi \wedge \psi = -\psi \wedge \phi$  e  $\phi \wedge \phi = 0$ , ciò mostra che  $\wedge$  è anticommutativo su  $\Lambda^1(V^*)$ . Come scopriremo più in là, l'anticommutatività del prodotto esterno sulle 1-forme è una proprietà fondamentale. Infatti, il criterio essenziale per sviluppare l'algebra dei tensori alternanti è quello di costruire l'anticommutatività nella teoria dell'integrazione. L'anticommutatività introduce alcune relazioni nell'insieme dei tensori generatori  $\{\phi_I\}$ . Se due sequenze di indici  $I$  e  $J$  differiscono solo nei loro ordinamenti, applicando in modo iterato l'anticommutatività si mostra che  $\phi_I = \pm \phi_J$ , e se uno qualsiasi degli indici di  $I$  è uguale allora  $\phi_I = 0$ . Di conseguenza, possiamo eliminare le ridondanze e

## 8CAPITOLO 1. FORME DIFFERENZIALI E INTEGRAZIONE SU VARIETÀ

considerare solo le  $\phi_I$  per le quali la sequenza di indici è strettamente crescente:  
 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq k$ .

Il numero di tali sequenze è il numero di modi in cui si possono scegliere  $p$  elementi da un insieme  $\{1, \dots, k\}$ , vale a dire

$$\binom{k}{p} = \frac{k!}{p!(k-p)!}.$$

E' facile vedere che i tensori la cui la sequenza di indici è strettamente crescente sono linearmente indipendenti. Sia  $\{v_1, \dots, v_k\}$  la base per  $V$  duale a  $\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$ . Per ogni sequenza crescente di indici  $I = (i_1, \dots, i_p)$ , sia  $v_I = (v_{i_1}, \dots, v_{i_p})$ . La definizione dell'operatore *Alt* mostra quindi  $\phi_I(v_I) = \frac{1}{p!}$ , ma se  $J$  è un'altra sequenza crescente di indici, diversa da  $I$ , allora  $\phi_I(v_J) = 0$ . Quindi se  $\sum a_I \phi_I = 0$ , allora

$$0 = \sum a_I \phi_I(v_J) = \frac{1}{p!} a_J$$

mostra che ogni  $a_J = 0$ . Abbiamo quindi dimostrato il seguente teorema di base:

**Teorema 1.1.4** *Sia  $\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$  una base per  $V^*$ , allora*

*$\{\phi_I = \phi_{i_1} \wedge \dots \wedge \phi_{i_p} : 1 \leq i_1, \dots, i_p \leq k\}$  è una base per  $\Lambda^p(V^*)$ .*

*Ne consegue che  $\dim \Lambda^p(V^*) = \binom{k}{p} = \frac{k!}{p!(k-p)!}$ .*

Supponiamo che la sequenza di indici  $I$  abbia lunghezza  $p$ , mentre  $J$  abbia lunghezza  $q$ . Dalla anticommutatività di  $\wedge$  su  $\Lambda^1(V^*)$ , si può rapidamente mostrare che

$$\phi_I \wedge \phi_J = (-1)^{pq} \phi_J \wedge \phi_I.$$

Il teorema precedente implica quindi

**Corollario 1.1.5** *Il prodotto esterno soddisfa la seguente relazione di anticommutatività*

$$T \wedge S = (-1)^{pq} S \wedge T,$$

*per qualsiasi  $T \in \Lambda^p(V^*)$  e  $S \in \Lambda^q(V^*)$ .*

Si noti che il Teorema 1.1.4 indica che  $\Lambda^k(V^*)$  è unidimensionale, dove  $k = \dim V$ . Conosciamo già un  $k$ -tensore alternante diverso da zero su  $\mathbf{R}^k$ , il tensore determinante *det*. Quindi,  $\dim \Lambda^k(\mathbf{R}^{k*}) = 1$  indica che ogni funzione  $k$ -multilineare alternante su  $\mathbf{R}^k$  è un multiplo del determinante, un fatto che già conosciamo come "unicità della funzione determinante".

Se la lunghezza della sequenza di indici  $I$  è maggiore della dimensione  $k$  di  $V$ ,

allora  $I$  ripeterà almeno un indice; quindi  $\phi_I = 0$ . Concludiamo che  $\Lambda^p(V^*) = 0$  se  $p > k$ , quindi la sequenza di spazi vettoriali  $\Lambda^1(V^*), \Lambda^2(V^*), \dots$  termina con  $\Lambda^k(V^*)$ . In questo contesto è utile definire anche  $\Lambda^0(V^*) = \mathbf{R}$ , che viene interpretata come insieme di funzioni costanti su  $V$ . Estendiamo  $\wedge$  semplicemente lasciando che il prodotto esterno di un qualsiasi elemento in  $\mathbf{R}$  con un qualsiasi tensore in  $\Lambda^p(V^*)$  sia la normale moltiplicazione scalare. Il prodotto esterno rende quindi la somma diretta

$$\Lambda(V^*) = \Lambda^0(V^*) \oplus \Lambda^1(V^*) \oplus \dots \oplus \Lambda^k(V^*),$$

un'algebra non commutativa, chiamata *algebra esterna* di  $V^*$ , il cui elemento identità è  $1 \in \Lambda^0(V^*)$ .

C'è un'ulteriore costruzione di base: supponiamo che  $A : V \rightarrow W$  sia una funzione lineare. Quindi la funzione trasposta  $A^* : W^* \rightarrow V^*$  si estende in modo evidente alle algebre esterne,  $A^* : \Lambda^p(W^*) \rightarrow \Lambda^p(V^*)$  per tutti i  $p \geq 0$ . Se  $T \in \Lambda^p(W^*)$ , basta definire  $A^*T \in \Lambda^p(V^*)$  come

$$A^*T(v_1, \dots, v_p) = T(Av_1, \dots, Av_p)$$

per tutti i vettori  $v_1, \dots, v_p \in V$ . È facile verificare che  $A^*$  sia lineare e che

$$A^*(T \wedge S) = A^*T \wedge A^*S.$$

Così  $A^*$  è un omomorfismo algebrico:  $\Lambda(W^*) \rightarrow \Lambda(V^*)$ . Si noti che se  $B : W \rightarrow U$  è un'altra funzione lineare, allora  $(BA)^* = A^*B^*$ .

In particolare, supponiamo che  $A : V \rightarrow V$  sia un isomorfismo e  $\dim V = k$ . Allora  $A^* : \Lambda^k(V^*) \rightarrow \Lambda^k(V^*)$  è una funzione lineare di uno spazio vettoriale unidimensionale, quindi è definita come  $A^*T = \lambda T$  per ogni  $T \in \Lambda^k(V^*)$  e per una qualche costante  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Affermiamo che  $\lambda$  è il determinante di  $A$ . Sappiamo che  $\det \in \Lambda^k(\mathbf{R}^{k*})$ . Quindi scelgo un qualsiasi isomorfismo  $B : V \rightarrow \mathbf{R}^k$  e considero  $T = B^*(\det) \in \Lambda^k(V^*)$ . Dunque  $A^*B^*(\det) = \lambda B^*(\det)$ , implicando

$$B^{*-1}A^*B^*(\det) = \lambda(B^*)^{-1}B^*(\det) = \lambda(BB^{-1})^*(\det) = \lambda(\det)$$

oppure

$$(BAB^{-1})^*(\det) = \lambda(\det).$$

Ora valutiamo entrambi i membri di questa equazione rispetto alla base ordinata standard  $\{e_1, \dots, e_k\}$  di  $\mathbf{R}^k$ . Un rapido controllo della definizione di tensore  $\det$  mostra che, per ogni funzione lineare  $C$ ,  $\det(Ce_1, \dots, Ce_k) = \det(C)$ . Perciò

$$\lambda = \det(BAB^{-1}) = \det(A),$$

provando il *Teorema del determinante*

**Teorema 1.1.6** *Sia  $A : V \rightarrow V$  un isomorfismo lineare, allora  $A^*T = (\det A)T$  per ogni  $T \in \Lambda^k(V^*)$ , dove  $k = \dim V$ . In particolare, se  $\phi_1, \dots, \phi_k \in \Lambda^1(V^*)$ , allora*

$$A^*\phi_1 \wedge \dots \wedge A^*\phi_k = (\det A)\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_k.$$

## 1.2 Forme differenziali

**Definizione 1.2.1** *Sia  $X$  una varietà liscia con o senza bordo. Una  $p$ -forma su  $X$  è una funzione  $\omega$  che assegna a ciascun punto  $x \in X$  un  $p$ -tensore alternante  $\omega(x)$  sullo spazio tangente di  $X$  in  $x$ ;  $\omega(x) \in \Lambda^p[T_x(X)^*]$ .*

Due  $p$ -forme  $\omega_1$  e  $\omega_2$  possono essere sommate punto per punto per creare una nuova  $p$ -forma  $\omega_1 + \omega_2$  :

$$(\omega_1 + \omega_2)(x) = \omega_1(x) + \omega_2(x).$$

Allo stesso modo, il prodotto esterno di forme è definito punto per punto. Se  $\omega$  è una  $p$ -forma e  $\theta$  è una  $q$ -forma, la  $p + q$  forma  $\omega \wedge \theta$  è data da  $(\omega \wedge \theta)(x) = \omega(x) \wedge \theta(x)$ . L'anticommutatività  $\omega \wedge \theta = (-1)^{pq}\theta \wedge \omega$  segue da un'equazione analoga in ogni punto.

Le 0-forme sono funzioni arbitrarie a valori reali su  $X$ . Molti esempi di 1-forme possono essere ottenuti da funzioni lisce. Se  $\phi : X \rightarrow \mathbf{R}$  è una funzione liscia,  $d\phi_x : T_x(X) \rightarrow \mathbf{R}$  è una funzione lineare in ogni punto  $x$ . Quindi l'assegnazione  $x \rightarrow d\phi_x$  definisce una 1-forma  $d\phi$  su  $X$ , chiamata *differenziale* di  $\phi$ . In particolare, le funzioni di coordinate  $x_1, \dots, x_k$  su  $\mathbf{R}^k$  producono 1-forme  $dx_1, \dots, dx_k$  su  $\mathbf{R}^k$ . Ora per ogni  $z \in \mathbf{R}^k$ ,  $T_z(\mathbf{R}^k) = \mathbf{R}^k$ ; si noti che i differenziali  $dx_1, \dots, dx_k$  hanno l'azione specifica  $dx_i(z)(a_1, \dots, a_k) = a_i$ . Quindi per ogni  $z \in \mathbf{R}^k$ , i funzionali lineari  $dx_1(z), \dots, dx_k(z)$  sono la base standard per  $(\mathbf{R}^k)^*$ .

In termini di  $dx_1, \dots, dx_k$  è facile scrivere tutte le forme su un sottoinsieme aperto  $U$  di  $\mathbf{R}^k$ . Per ciascuna sequenza di indici strettamente crescente  $I = (i_1, \dots, i_p)$ , sia

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

una  $p$ -forma su  $\mathbf{R}^k$ . Allora dal Teorema 1.1.4 ottengo  $\Lambda^p[T_z(U)^*] = \Lambda^p(\mathbf{R}^{k*})$ , da cui segue la seguente proposizione:

**Proposizione 1.2.2** *Ogni  $p$ -forma su un insieme aperto  $U \subset \mathbf{R}^k$  può essere espressa in modo univoco come una somma  $\sum_I f_I dx_I$ , con la sequenza di indici crescenti  $I = (i_1 < \dots < i_p)$  essendo le  $f_I$  funzioni su  $U$ .*

Se  $f : X \rightarrow Y$  è una funzione liscia e  $\omega$  è una  $p$ -forma su  $Y$ , definiamo una  $p$ -forma  $f^*\omega$  su  $X$  come segue. Se  $f(x) = y$ , allora  $f$  induce una funzione derivata  $df_x : T_x(X) \rightarrow T_y(Y)$ . Poiché  $\omega(y)$  è un  $p$ -tensore alternante su  $T_y(Y)$ , possiamo riportarlo a  $T_x(X)$  usando la trasposizione  $(df_x)^*$ , come descritto nella sezione precedente. Definisco

$$f^*\omega(x) = (df_x)^*\omega[f(x)].$$

Dunque  $f^*\omega(x)$  è un  $p$ -tensore alternante su  $T_x(X)$ , quindi  $f^*\omega$  è una  $p$ -forma su  $X$ , chiamata il *pullback* di  $\omega$  tramite  $f$ . Quando  $\omega$  è una 0-forma, e quindi una funzione su  $Y$ , si ha  $f^*\omega = \omega \circ f$ , una funzione su  $X$ .

**Proprietà di  $f^*$ :**

$$f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*\omega_1 + f^*\omega_2$$

$$f^*(\omega \wedge \theta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\theta)$$

$$(f \circ h)^*\omega = h^*f^*\omega.$$

Ora vediamo in modo esplicito cosa fa  $f^*$  su  $\mathbf{R}^k$ . Siano  $U \subset \mathbf{R}^k$  e  $V \subset \mathbf{R}^l$  sottoinsiemi aperti, e sia  $f : V \rightarrow U$  liscia. Indico con  $x_1, \dots, x_k$  le funzioni di coordinate standard su  $\mathbf{R}^k$  e  $y_1, \dots, y_l$  su  $\mathbf{R}^l$ . Scrivo  $f$  concretamente come  $f = (f_1, \dots, f_k)$ , essendo ogni  $f_i$  una funzione liscia su  $V$ . La derivata  $df_y$  in un punto  $y \in V$  è rappresentata dalla matrice

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(y) \right),$$

e la sua funzione di trasposizione  $(df_y)^*$  è rappresentata dalla matrice trasposta. Di conseguenza

$$f^*dx_i = \sum_{j=1}^l \frac{\partial f_i}{\partial y_j} dy_j = df_i.$$

Conoscere il comportamento di  $f^*$  sulle 0-forme e sulle 1-forme di base  $dx_i$  lo determina completamente. Ogni forma arbitraria  $\omega$  su  $U$  può essere scritta unicamente come

$$\omega = \sum_I a_I dx_I.$$

Ora l'applicazione delle proprietà astratte di  $f^*$  sopra elencate dà

$$f^*(\omega) = \sum_I (f^*a_I) df_I.$$

qui la funzione  $f^*a_I = a_I \circ f$  è il pullback della 0-forma  $a_I$  da  $U$  a  $V$ , e usiamo  $f_I$  per indicare  $f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_p}$ .

Un esempio è di fondamentale importanza. Supponiamo che  $f : V \rightarrow U$  sia un diffeomorfismo di due insiemi aperti in  $\mathbf{R}^k$  e  $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$  (la cosiddetta *forma di volume* su  $U$ ). Se  $f(y) = x$ , sia  $T_y(V)$  che  $T_x(U)$  sono uguali a  $\mathbf{R}^k$ , anche se nella notazione di coordinate che abbiamo usato, la base standard delle funzioni lineari su  $\mathbf{R}^k$  è scritta come  $dy_1(y), \dots, dy_k(y)$  per  $T_y(V)$  ma come  $dx_1(x), \dots, dx_k(x)$



per  $T_x(U)$ . Il teorema del determinante del capitolo precedente ci dà ora la formula

$$f^*\omega(y) = (df_y)^*dx_1(x) \wedge \cdots \wedge (df_y)^*dx_k(x) = \det(df_y)dy_1(y) \wedge \cdots \wedge dy_k(y).$$

Più brevemente,

$$f^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k) = \det(df)dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_k,$$

dove denotiamo con  $\det(df)$  la funzione  $y \mapsto \det(df_y)$  su  $V$ .

Si dice che una forma  $\omega$  su un insieme aperto  $U \subset \mathbf{R}^k$  è *liscia* se ogni funzione coefficiente  $a_I$  in  $\sum_I a_I dx_I$  è liscia. Se  $f : V \rightarrow U$  è una funzione liscia di sottoinsiemi aperti di due spazi euclidei, allora  $f^*\omega$  è liscia se  $\omega$  lo è.

Più in generale, abbiamo definito una forma  $\omega$  liscia su  $X$  per indicare che per ogni parametrizzazione locale  $h : U \rightarrow X$ ,  $h^*\omega$  è una forma liscia su un insieme aperto  $U$  di  $\mathbf{R}^k$ . Ovviamente, non è necessario controllare realmente ogni parametrizzazione, ma basta controllare su un ricoprimento di  $X$ ; se  $h_\alpha : U_\alpha \rightarrow X$  è una raccolta di parametrizzazioni locali che coprono  $X$  (cioè  $X = \bigcup_\alpha h_\alpha(U_\alpha)$ ), allora la forma  $\omega$  è liscia purché ogni pullback  $h_\alpha^*\omega$  sia liscio. Infatti se  $h : U \rightarrow X$  è un'altra parametrizzazione locale, possiamo scrivere il dominio  $U$  come l'unione di sottodomini aperti  $h^{-1}[h_\alpha(U_\alpha)]$  e su ogni  $h^{-1}[h_\alpha(U_\alpha)]$ , l'equazione  $h^*\omega = (h_\alpha^{-1} \circ h)^*h_\alpha^*\omega$  mostra che  $h^*\omega$  è liscia.

Poiché siamo interessati solo a forme lisce, da ora con la parola "forma" intenderemo implicitamente "forma liscia".

Chiudiamo la sezione con un ultimo lemma, la cui dimostrazione viene omessa:

**Lemma 1.2.3** *Sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione omogenea di varietà, e sia  $\phi$  una funzione liscia su  $Y$ . Allora*

$$f^*(d\phi) = d(f^*\phi).$$

### 1.3 Integrazione su varietà

**Teorema 1.3.1 (Cambio di variabili in  $\mathbf{R}^k$ )** Supponiamo che  $f : V \rightarrow U$  sia un diffeomorfismo di insiemi aperti in  $\mathbf{R}^k$  e che  $a$  sia una funzione integrabile su  $U$ . Allora

$$\int_U a dx_1 \cdots dx_k = \int_V (a \circ f) |det(df)| dy_1 \cdots dy_k.$$

Qui seguiamo la nostra precedente notazione usando  $det(df)$  per indicare la funzione  $y \mapsto det(df_y)$  su  $V$ . È facile vedere che il teorema vale anche nel semispazio  $\mathbf{H}^k = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{R}^k \mid x_k > 0\}$ .

Quando cambiamo le variabili con tale applicazione  $f$ , funzioni come  $a$  sono trasformate nei loro pullbacks  $a \circ f$ . Eppure questa trasformazione non è naturale dal punto di vista dell'integrazione. Dal momento che  $f$  distorce il volume in quanto forza  $V$  su  $U$ , l'integrale di  $a \circ f$  non è lo stesso dell'integrale di  $a$ . Bisogna compensare includendo il fattore  $|det(df)|$ , che misura l'alterazione infinitesima di volume.

Ciò che differenzia significativamente le forme è che neutralizzano automaticamente questa modifica del volume. Si consideri, ad esempio, come integrando originale non la funzione  $a$ , con  $dx_1 \cdots dx_k$  che serve come simbolo formale di integrazione, ma la  $k$ -forma  $\omega = adx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ . Allora definisco

$$\int_U \omega = \int_U a dx_1 \cdots dx_k.$$

Come calcolato nell'ultima sezione, il pullback di  $\omega$  è

$$f^*(\omega) = (a \circ f) det(df) dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_k.$$

Se  $f$  mantiene l'orientamento, allora  $det(df) > 0$ , quindi  $f^*\omega$  è esattamente l'integrando a destra nel *Teorema del Cambiamento delle variabili*. Ogni  $k$ -forma  $\omega$  su  $U$  è  $adx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$  per qualche funzione  $a$ , quindi se chiamiamo  $\omega$  "integrabile" quando  $a$  lo è, il teorema raggiunge una forma molto naturale.

**Teorema 1.3.2 (Cambio di variabili in  $\mathbf{R}^k$ )** Supponiamo che  $f : V \rightarrow U$  sia un diffeomorfismo di insiemi aperti in  $\mathbf{R}^k$  o  $\mathbf{H}^k$  che conserva l'orientamento, e sia  $\omega$  una  $k$ -forma integrabile su  $U$ . Allora

$$\int_U \omega = \int_V f^*\omega.$$

Se  $f$  inverte l'orientamento, allora

$$\int_U \omega = - \int_V f^*\omega.$$

Ripercorrendo la precedente sezione, si può notare che l'aspetto automatico del fattore di compensazione  $\det(df)$  è una conseguenza meccanica del comportamento anticommutativo delle 1-forme:  $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ . Quindi, l'intero apparato algebrico delle forme esiste per fornire integrandi che si trasformino correttamente per l'integrazione. Questa proprietà di trasformazione è importante perché ci consente di integrare forme su varietà, senza fare ricorso a coordinate standard come nello spazio euclideo.

Sia  $\omega$  una  $k$ -forma liscia su  $X$ , una varietà  $k$ -dimensionale con contorno. Il *supporto* di  $\omega$  è definito come la chiusura dell'insieme dei punti in cui  $\omega(x) \neq 0$ ; ipotizziamo che questa chiusura sia compatta, nel qual caso  $\omega$  si dice che è a *supporto compatto*.

Inizialmente, supponiamo anche che il supporto di  $\omega$  sia contenuto in un solo sottoinsieme parametrizzabile aperto  $W$  di  $X$ .

Quindi se  $h : U \rightarrow W$  è un diffeomorfismo che preserva l'orientamento, con  $U$  sottoinsieme aperto di  $\mathbf{H}^k$ ,  $h^*\omega$  è una  $k$ -forma liscia su  $U$  a supporto compatto. Pertanto  $h^*\omega$  è integrabile e definiamo  $\int_X \omega = \int_U h^*\omega$ . Che cosa succede se  $g : V \rightarrow W$  è un'altra parametrizzazione di  $W$ ? Allora  $f = h^{-1} \circ g$  è un diffeomorfismo  $V \rightarrow U$  che preserva l'orientamento, quindi

$$\int_U h^*\omega = \int_V f^*h^*\omega = \int_V g^*\omega.$$

Grazie alle proprietà di trasformazione delle forme,  $\int_X \omega$  ha un significato intrinseco, indipendente dalla scelta della parametrizzazione.

Ora, per definire l'integrale di una  $k$ -forma  $\omega$  su  $X$ , liscia e a supporto compatto, usiamo semplicemente una partizione dell'unità per suddividere  $\omega$  in pezzi con supporto parametrizzabile. La raccolta di sottoinsiemi parametrizzabili aperti di  $X$  forma una copertura aperta; scegli una partizione subordinata dell'unità  $\{\rho_i\}$ . La proprietà di finitezza locale di  $\{\rho_i\}$  implica che molti di loro sono identicamente zero sul supporto compatto di  $\omega$ . Quindi solo un numero finito di forme  $\rho_i\omega$  sono diverse da zero e ognuna ha un supporto compatto all'interno di un insieme aperto parametrizzabile. Definiamo

$$\int_X \omega = \sum_i \int \rho_i\omega.$$

Mostrare che  $\int_X \omega$  non dipende dalla particolare partizione dell'unità scelta è facile. Prima di tutto, tuttavia, bisogna osservare che se il supporto di  $\omega$  è effettivamente interno ad un insieme parametrizzabile aperto, allora le due definizioni di  $\int_X \omega$  appena date sono d'accordo.

Da  $\sum_i \rho_i(x) = 1$  per ogni  $x \in X$ ,

$$\sum_i \rho_i \omega = \omega.$$

Quindi la linearità del pullback e dell'integrazione nello spazio euclideo implicano

$$\int_X \omega = \sum_i \int_X \rho_i \omega.$$

Supponiamo ora che  $\{\rho'_j\}$  sia un'altra partizione dell'unità adeguata.

Quindi da ciò che abbiamo appena osservato, per ogni  $i$ ,

$$\int_X \rho_i \omega = \sum_j \int_X \rho'_j \rho_i \omega;$$

allo stesso modo, per ogni  $j$ ,

$$\int_X \rho'_j \omega = \sum_i \int_X \rho_i \rho'_j \omega.$$

Quindi

$$\sum_i \int_X \rho_i \omega = \sum_i \sum_j \int_X \rho'_j \rho_i \omega = \sum_j \sum_i \int_X \rho_i \rho'_j \omega = \sum_j \int_X \rho'_j \omega.$$

mostra che  $\int_X \omega$  è lo stesso quando calcolato con entrambe le partizioni.

È banale verificare che  $\int_X$  abbia le proprietà standard di linearità:

$$\int_X (\omega_1 + \omega_2) = \int_X \omega_1 + \int_X \omega_2$$

e

$$\int_X c \omega = c \int_X \omega$$

se  $c \in \mathbf{R}$ .

La nostra teoria dell'integrazione generalizzata continua a comportarsi correttamente anche quando i domini vengono modificati.

**Teorema 1.3.3** *Se  $f : Y \rightarrow X$  è un diffeomorfismo che preserva l'orientamento, allora  $\int_X \omega = \int_Y f^* \omega$  per ogni  $k$ -forma a supporto compatto e liscia su  $X$  ( $k = \dim X = \dim Y$ ).*

Anche se possiamo integrare le  $k$ -forme solo su un  $X$   $k$ -dimensionale, possiamo integrare altre forme rispetto alle sottovarietà. Se  $Z$  è una sottovarietà orientata di  $X$  e  $\omega$  è una forma su  $X$ , le nostre operazioni astratte ci danno un modo

naturale di "restringere"  $\omega$  a  $Z$ . Sia  $i : Z \hookrightarrow X$  la funzione di inclusione e definisco la *restrizione* di  $\omega$  a  $Z$  come la forma  $i^*\omega$ . È ovvio che quando  $\omega$  è una 0-forma,  $i^*\omega$  è semplicemente la restrizione usuale della funzione  $\omega$  a  $Z$ .

Ora se  $\dim Z = l$  e  $\omega$  è una  $l$ -forma il cui supporto interseca  $Z$  in un insieme compatto, definiamo l'integrale di  $\omega$  su  $Z$  come l'integrale della sua restrizione,

$$\int_Z \omega = \int_Z i^*\omega.$$

Esaminiamo alcuni esempi specifici. Supponiamo che

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$$

sia una 1-forma liscia su  $\mathbf{R}^3$ , e sia  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  un diffeomorfismo dell'intervallo unitario  $I = [0, 1]$  su  $C = \gamma(I)$ , una 1-varietà compatta con bordo. Dunque

$$\int_C \omega = \int_I \gamma^*\omega.$$

Se

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)).$$

allora

$$\gamma^* dx_i = d\gamma_i = \frac{d\gamma_i}{dt} dt,$$

quindi otteniamo

$$\int_C \omega = \sum_{i=1}^3 \int_0^1 f_i[\gamma(t)] \frac{d\gamma_i}{dt}(t) dt.$$

Se definiamo  $F$  come campo vettoriale  $(f_1, f_2, f_3)$  in  $\mathbf{R}^3$ , allora il secondo membro dell'equazione precedente è solitamente chiamato *linea integrale* di  $F$  su  $C$  e si denota con  $\oint F d\gamma$ .

Successivamente su  $\mathbf{R}^3$ , considero una 2-forma a supporto compatto

$$\omega = f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

Integriamo  $\omega$  su una superficie  $S$ , che, per semplicità, assumiamo essere il grafico di una funzione  $G : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x_3 = G(x_1, x_2)$ . (Questa ipotesi non è realmente restrittiva perché, localmente, qualsiasi superficie può essere scritta come il grafico di una funzione, anche se a volte è necessario scrivere  $x_1$  o  $x_2$  in funzione di altre due coordinate anziché della solita  $x_3$ .)

Cos'è  $\int_S \omega$ ? Possiamo scegliere per  $S$  la parametrizzazione  $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow S$  definita da

$$h(x_1, x_2) = (x_1, x_2, G(x_1, x_2)).$$

Calcolo:

$$h^* dx_1 \wedge dx_2 = dx_1 \wedge dx_2;$$

$$h^* dx_2 \wedge dx_3 = dx_2 \wedge dG = dx_2 \wedge \left( \frac{\partial G}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial G}{\partial x_2} dx_2 \right) = -\frac{\partial G}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2;$$

e, analogamente,

$$h^* dx_3 \wedge dx_1 = -\frac{\partial G}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2.$$

Usiamo la formula

$$\int_S \omega = \int_{\mathbf{R}^2} (n_1 f_1 + n_2 f_2 + n_3 f_3) dx_1 dx_2,$$

dove

$$n = (n_1, n_2, n_3) = \left( -\frac{\partial G}{\partial x_1}, -\frac{\partial G}{\partial x_2}, 1 \right).$$

Verificare che in qualsiasi punto  $x = (x_1, x_2, G(x_1, x_2))$  in  $S$ , il vettore  $n(x)$  sia normale alla superficie  $S$ ; cioè,  $n(x) \perp T_x(S)$ .

Possiamo riscrivere l'integrale in una forma. Sia  $u = \frac{n}{|n|}$  il vettore normale unitario, sia  $F = (f_1, f_2, f_3)$ , e definiamo una 2-forma liscia  $dA = |n| dx_1 \wedge dx_2$ .

Dunque

$$\int_S \omega = \int_{\mathbf{R}^2} (F \cdot u) dA.$$

La forma  $dA$  è chiamata *elemento di area* della superficie  $S$ .

# Capitolo 2

## Teorema di Stokes

### 2.1 La derivata esterna

Le forme non possono essere solo integrate, possono anche essere differenziate. Abbiamo già visto come fare questo in generale per le 0-forme, ottenendo da una funzione liscia  $f$  la 1-forma  $df$ . Nello spazio euclideo è ovvio come procedere. Se  $\omega = \sum a_I dx_I$  è una  $p$ -forma liscia su un sottoinsieme aperto di  $\mathbf{R}^k$ , differenziamo semplicemente le sue funzioni coefficiente. Definiamo la *derivata esterna* di  $\omega$  come la  $(p+1)$  forma  $d\omega = \sum da_I \wedge dx_I$ . Il seguente teorema elenca le proprietà più importanti di questa definizione.

**Teorema 2.1.1** *L'operatore di differenziazione esterna  $d$ , definito su forme lisce su aperti  $U \subset \mathbf{R}^k$  (o  $H^k$ ), possiede le seguenti tre proprietà:*

(a) *linearità:*

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2.$$

(b) *legge di moltiplicazione:*

$$d(\omega \wedge \theta) = (d\omega) \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge d\theta$$

con  $\omega$  una  $p$ -forma.

(c) *condizione del cociclo:*

$$d(d\omega) = 0.$$

*Inoltre, questo è l'unico operatore che esibisce queste proprietà e concorda con la precedente definizione di  $df$  per funzioni lisce  $f$ .*

**Dimostrazione:** La parte (a) è ovvia; le parti (b) e (c) sono computazionali. Dimostriamo (c): se  $\omega = \sum_I a_I dx_I$ , allora

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I = \sum_I \left( \sum_i \frac{\partial a_I}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_I.$$

Quindi

$$d(d\omega) = \sum_I \sum_i \left( \sum_j \frac{\partial^2 a_I}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_i \wedge dx_I.$$

Usando il fatto che

$$\frac{\partial^2 a_I}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 a_I}{\partial x_j \partial x_i}$$

ma

$$dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j,$$

cancelliamo a due a due i termini nella somma, mostrando che  $d(d\omega) = 0$ .

L'unicità segue facilmente. Supponiamo che  $D$  sia un altro operatore che soddisfi (a), (b), (c), e tale che  $Df = df$ . Quindi  $D(dx_I) = 0$ . Per (b),

$$D(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) = \sum_j \pm dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge Ddx_{i_j} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p},$$

ma

$$D(dx_{i_j}) = D(Dx_{i_j}) = 0.$$

Ora sia  $\omega = \sum_I a_I dx_I$  qualsiasi  $p$ -forma. Allora segue da (a) e (b) che

$$D\omega = \sum_I [D(a_I) \wedge dx_I + a_I D(dx_I)].$$

Da  $D(dx_I) = 0$  e  $D(a_I) = da_I$ , segue  $D\omega = d\omega$ . □

**Corollario 2.1.2** *Supponiamo che  $g : V \rightarrow U$  sia un diffeomorfismo di insiemi aperti di  $\mathbf{R}^k$ . Quindi per ogni forma  $\omega$  su  $U$ ,  $d(g^*\omega) = g^*(d\omega)$ .*

**Dimostrazione:** Basta controllare che l'operatore  $D = (g^{-1})^* \circ d \circ g^*$  soddisfi (a), (b) e (c). Abbiamo già dimostrato in precedenza il lemma per le funzioni, quindi  $D$  e  $d$  concordano per le funzioni su  $U$ . Ne consegue che  $D = d$ , o  $d \circ g^* = g^* \circ d$ . □

Proprio come la legge di trasformazione naturale

$$\int_V g^*\omega = \int_U \omega$$

ci ha permesso di definire l'integrazione su varietà, così la relazione  $d \circ g^* = g^* \circ d$  ci permette di differenziare le forme su varietà. Supponiamo che  $\omega$  sia una  $p$ -forma su  $X$ , una varietà con bordo. Definiamo la derivata esterna  $d\omega$  localmente. Se  $\phi : U \rightarrow X$  è una parametrizzazione locale, definiamo  $d\omega$  sull'insieme delle immagini  $\phi(U)$  come  $(\phi^{-1})^* d(\phi^*\omega)$ . Se  $\psi : V \rightarrow X$  è un'altra parametrizzazione



con immagine sovrapposta (l' intersezione delle due immagini è un insieme non vuoto), allora sulla sovrapposizione sappiamo che

$$(\phi^{-1})^*d(\phi^*\omega) = (\psi^{-1})^*d(\psi^*\omega),$$

infatti per  $g = \phi^{-1} \circ \psi$  e per il corollario,

$$g^*d(\phi^*\omega) = d(g^*\phi^*\omega) = d(\psi^*\omega),$$

quindi

$$(\psi^{-1})^*d(\psi^*\omega) = (\psi^{-1})^*g^*d(\phi^*\omega) = (\phi^{-1})^*d(\phi^*\omega).$$

Poiché ogni punto di  $X$  si trova nell'immagine di una qualche parametrizzazione,  $d\omega$  è una  $(p+1)$  forma ben definita e globalmente definita su  $X$ .

**Teorema 2.1.3** *L'operatore di differenziazione esterna definito per forme su varietà arbitrarie con bordo ha le seguenti proprietà:*

1.  $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$ .
2.  $d(\omega \wedge \theta) = (d\omega) \wedge \theta + (-1)^p\omega \wedge d\theta$ , dove  $\omega$  è una  $p$ -forma.
3.  $d(d\omega) = 0$ .
4. Se  $f$  è una funzione,  $df$  è d'accordo con la definizione precedente.
5. Se  $g : Y \rightarrow X$  è un diffeomorfismo, allora  $d \circ g^* = g^* \circ d$ .

**Osservazione 2.1.4** *Le due operazioni euclidee,  $\int$  e  $d$ , si estendono alle varietà per ragioni analoghe: entrambe si trasformano naturalmente sotto il cambio di coordinate. Tuttavia, c'è una grande differenza nella profondità delle due proprietà di trasformazione. Il Teorema del cambiamento di variabili per l'integrazione (che abbiamo invocato nell'ultima sezione ma non abbiamo dimostrato) è piuttosto sottile, richiedendo un'analisi precisa del modo in cui il volume euclideo viene distorto dai diffeomorfismi. Al contrario, il fatto che  $d$  commuti con il pullback,  $d \circ g^* = g^* \circ d$ , è una semplice conseguenza della definizione. Inoltre,  $g$  non deve essere un diffeomorfismo, la formula è valida per mappe arbitrarie.*

**Teorema 2.1.5** *Sia  $g : Y \rightarrow X$  una qualsiasi funzione liscia di varietà con bordo. Allora per ogni forma  $\omega$  su  $X$ ,  $d(g^*\omega) = g^*(d\omega)$ .*

**Dimostrazione:** Abbiamo precedentemente dimostrato la tesi nel caso in cui  $\omega$  sia una 0-forma ed è facile dimostrarla anche quando  $\omega = df$  è il differenziale di una 0-forma, poiché  $d\omega = 0$  implica  $g^*(d\omega) = 0$ , e

$$d(g^*\omega) = d(g^*df) = d(dg^*f) = 0.$$

Inoltre, la parte 2. del teorema precedente mostra che se questo teorema vale per  $\omega$  e  $\theta$ , allora è valido anche per  $\omega \wedge \theta$ . Ma localmente, ogni forma su  $X$  è esprimibile come un prodotto esterno di una 0-forma e di un numero di differenziali di 0-forme, poiché nello spazio euclideo ogni forma è  $\sum a_I dx_I$ . Poiché il teorema è locale (le due forme  $d(g^*\omega)$  e  $g^*(d\omega)$  sono uguali se sono uguali in un intorno di ogni punto), abbiamo finito.  $\square$

Prima di chiudere questa sezione, calcoliamo completamente l'operatore  $d$  in  $\mathbf{R}^3$ . In effetti, è probabilmente abbastanza noto, anche se espresso in termini di campi vettoriali piuttosto che di forme.

**0-forme.** Sia  $f$  una funzione su  $\mathbf{R}^3$ , allora

$$df = g_1 dx_1 + g_2 dx_2 + g_3 dx_3,$$

dove

$$(g_1, g_2, g_3) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) = \text{grad}(f),$$

è il campo vettoriale del gradiente di  $f$ .

**1-forme.** Sia

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3.$$

Allora

$$d\omega = df_1 \wedge dx_1 + df_2 \wedge dx_2 + df_3 \wedge dx_3 = g_1 dx_2 \wedge dx_3 + g_2 dx_3 \wedge dx_1 + g_3 dx_1 \wedge dx_2,$$

dove

$$g_1 = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \quad g_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \quad g_3 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}.$$

Se definiamo  $F$  e  $G$  i campi vettoriali  $(f_1, f_2, f_3)$  e  $(g_1, g_2, g_3)$ , allora  $G = \text{rot} F$ .

**2-forme.** Per

$$\omega = f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2,$$

$$d\omega = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = (\text{div} F) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

**3-forme.**  $d\omega = 0$ , qualsiasi  $\omega$  3-forma.

Quindi gli operatori classici del calcolo vettoriale in uno spazio di dimensione 3, il gradiente, il rotore e la divergenza, sono in realtà l'operatore  $d$  in forma di campo vettoriale.

Si noti che la condizione di cociclo  $d^2 = 0$  su  $\mathbf{R}^3$  è equivalente alle due famose formule  $\text{rot}(\text{grad}f) = 0$  e  $\text{div}(\text{rot}F) = 0$ .

## 2.2 Coomologia di De Rham

Una  $p$ -forma  $\omega$  su  $X$  è *chiusa* se  $d\omega = 0$  e *esatta* se  $\omega = d\theta$  per qualche  $(p-1)$  forma  $\theta$  su  $X$ . Le forme esatte sono tutte chiuse, poiché  $d^2 = 0$ , ma può accadere che una forma chiusa non sia esatta.

Per misurare il fallimento dell'implicazione *chiuso*  $\implies$  *esatto*, definiamo una relazione di equivalenza sullo spazio vettoriale di  $p$ -forme chiuse su  $X$ . Due  $p$ -forme chiuse  $\omega$  e  $\omega'$  sono chiamate *coomologhe*, in modo abbreviato  $\omega \sim \omega'$ , se la loro differenza è esatta:  $\omega - \omega' = d\theta$ .

L'insieme delle classi di equivalenza è detto  $H^p(X)$ ,  $p$ -esimo *gruppo di coomologia di De Rham* di  $X$ .  $H^p(X)$  è più di un insieme; ha una naturale struttura di spazio vettoriale reale, perché se  $\omega_1 \sim \omega'_1$  e  $\omega_2 \sim \omega'_2$ , allora  $\omega_1 + \omega_2 \sim \omega'_1 + \omega'_2$ ; inoltre, se  $c \in \mathbf{R}$ ,  $c\omega_1 \sim c\omega'_1$ . Quindi le operazioni dello spazio vettoriale su  $p$ -forme chiuse definiscono naturalmente l'addizione e la moltiplicazione scalare delle classi di coomologia. La 0-classe di coomologia nello spazio vettoriale  $H^p(X)$  è la collezione di forme esatte, poiché  $\omega + d\theta \sim \omega$  sempre.

Supponiamo che  $f : X \rightarrow Y$  sia una funzione liscia, in modo che  $f^*$  porti  $p$ -forme su  $Y$  in  $p$ -forme su  $X$ . Usa la relazione  $f^* \circ d = d \circ f^*$  per verificare che  $f^*$  trasporti forme chiuse in forme chiuse e forme esatte in forme esatte. Infatti, se  $\omega \sim \omega'$ , allora  $f^*\omega \sim f^*\omega'$ . Quindi  $f^*$  trascina le classi di coomologia su  $Y$  verso le classi di coomologia su  $X$ ; cioè,  $f^*$  definisce una applicazione  $f^\# : H^p(Y) \rightarrow H^p(X)$  tale che

$$f^\#([\omega]) = f^*(\omega).$$

Poiché  $f^*$  è lineare, puoi facilmente verificare che anche  $f^\#$  è lineare.

Elenchiamo ora dei fatti importanti legati ai gruppi di coomologia di De Rham:

1. Se  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$ ,  $(g \circ f)^\# = f^\# \circ g^\#$ .

In alcuni casi semplici, possiamo facilmente calcolare  $H^p(X)$ . Ad esempio,  $H^p(X) = 0$  per ogni  $p > \dim X$ . Il caso successivo più semplice è

2. La dimensione di  $H^0(X)$  è uguale al numero di componenti connesse in  $X$ . [Non ci sono 0-forme esatte. Una 0-forma, cioè una funzione, è chiusa se e solo se è costante su ogni componente di  $X$ ].

Per ottenere informazioni su altri gruppi di coomologia, definiremo un operatore  $P$  sulle forme. Proprio come gli operatori  $d$  e  $\int$ ,  $P$  viene prima definito nello spazio euclideo e poi esteso alle varietà mediante parametrizzazioni locali. Come per gli operatori precedenti, la ragione per cui  $P$  può essere così esteso è che si trasforma correttamente sotto diffeomorfismi.

Supponiamo che  $U$  sia un insieme aperto in  $\mathbf{R}^k$  e  $\omega$  sia una  $p$ -forma su  $\mathbf{R} \times U$ . Allora  $\omega$  può essere espresso univocamente come una somma

$$\omega = \sum_I f_I(t, x) dt \wedge dx_I + \sum_J g_J(t, x) dx_J. \quad (2.1)$$

Qui  $t$  è la funzione coordinata standard su  $\mathbf{R}$ ,  $x_1, \dots, x_k$  sono le funzioni coordinate standard su  $\mathbf{R}^k$ ,  $I$  e  $J$  sono sequenze di indici crescenti, rispettivamente di lunghezza  $p-1$  e  $p$ . L'operatore  $P$  trasforma  $\omega$  in una  $(p-1)$  forma  $P\omega$  su  $\mathbf{R} \times U$ , definita da

$$P\omega(t, x) = \sum_I \left[ \int_0^t f_I(s, x) ds \right] dx_I.$$

Si noti che  $P\omega$  non implica un termine  $dt$ . Ora sia  $\phi : V \rightarrow U$  un diffeomorfismo di sottoinsiemi aperti di  $\mathbf{R}^k$ , e sia  $\Phi : \mathbf{R} \times V \rightarrow \mathbf{R} \times U$  il diffeomorfismo  $\Phi = id \times \phi$ .

Proprietà di trasformazione essenziale:

$$\mathbf{3.} \quad \Phi^* P\omega = P\Phi^*\omega.$$

[Per verificarla basta notare che  $\Phi^* dt = dt$  e che  $\Phi^*$  converte ciascuna delle due somme dell'espressione (1) per  $\omega$  in somme dello stesso tipo].

Le stesse argomentazione usate per definire  $d$  e  $\int$  sulle varietà possono essere usate per mostrare che:

- 4.** Esiste un unico operatore  $P$ , definito per tutte le varietà  $X$ , che trasforma  $p$ -forme su  $\mathbf{R} \times X$  in  $(p-1)$  forme su  $\mathbf{R} \times X$  e che soddisfa i seguenti requisiti:
- (a) se  $\phi : X \rightarrow Y$  è un diffeomorfismo, e  $\Phi = identity \times \phi$ , allora  $\Phi^* \circ P = P \circ \Phi^*$ .
  - (b) se  $X$  è un sottoinsieme aperto di  $\mathbf{R}^k$ ,  $P$  è definito come sopra.

L'attrazione principale dell'operatore  $P$  è la seguente formula:

- 5.** Sia  $\pi : \mathbf{R} \times X \rightarrow X$  l'operatore di proiezione usuale e  $i_a : X \rightarrow \mathbf{R} \times X$  sia

un embedding  $x \mapsto (a, x)$ . Allora

$$dP\omega + Pd\omega = \omega - \pi^*i_a^*\omega.$$

La prima importante conseguenza di questa formula è

**6.** (*Lemma di Poincaré*) Le mappe

$$i_a^\sharp : H^p(\mathbf{R} \times X) \longrightarrow H^p(X)$$

e

$$\pi^\sharp : H^p(X) \longrightarrow H^p(\mathbf{R} \times X)$$

sono inverse l'una dall'altra. In particolare,  $H^p(\mathbf{R} \times X)$  è isomorfo a  $H^p(X)$ .  
 [  $\pi \circ i_a = id$ , quindi il punto 1. implica  $i_a^\sharp \circ \pi^\sharp = id$ . Per  $\pi^\sharp \circ i_a^\sharp$ , interpreto il punto 5. per le forme chiuse  $\omega$ . ]

**Osservazione 2.2.1** *Se  $X$  è un punto singolo, allora  $H^p(X) = 0$  se  $p > 0$ .*

Il lemma di Poincaré implica per induzione:

**Corollario 2.2.2**  *$H^p(\mathbf{R}^k) = 0$  se  $k > 0$ ; cioè, ogni  $p$ -forma chiusa su  $\mathbf{R}^k$  è esatta se  $p > 0$ .*

Un'altra conseguenza è:

**7.** se  $f, g : X \longrightarrow Y$  sono mappe omotopiche, allora  $f^\sharp = g^\sharp$ .

[Sia  $H : \mathbf{R} \times X \longrightarrow Y$  una funzione liscia tale che  $H(a, x) = f(x)$  e  $H(b, x) = g(x)$ . Quindi

$$f^\sharp = i_a^\sharp \circ H^\sharp$$

e

$$g^\sharp = i_b^\sharp \circ H^\sharp.$$

Ma dal punto 6. è chiaro che  $i_a^\sharp = i_b^\sharp$ .]

Ora rafforzo il corollario dell' punto 6. dimostrando

**8.** Se  $X$  è contraibile, allora  $H^p(X) = 0$  per ogni  $p > 0$ .

Concludiamo questa sezione con un risultato più profondo.

**Teorema 2.2.3**  $H^p(S^k)$  è unidimensionale per  $p = 0$  e  $p = k$ . Per tutti gli altri  $p$ ,  $H^p(S^k) = 0$  ( $k > 0$ ).

Ecco un approccio induttivo al teorema. Suppongo il teorema vero per  $S^{k-1}$  e lo dimostro per  $S^k$ .

Siano  $U_1 = S^k - \{\text{Polo Sud}\}$  e  $U_2 = S^k - \{\text{Polo Nord}\}$ . Con la proiezione stereografica, sia  $U_1$  che  $U_2$  sono diffeomorfe a  $\mathbf{R}^{k-1}$ .

**9.**  $U_1 \cap U_2$  è diffeomorfo a  $\mathbf{R} \times S^{k-1}$ .

[La proiezione stereografica mostra che  $U_1 \cap U_2$  è diffeomorfo a  $\mathbf{R}^{k-1} - \{0\}$ ].

Applico ora una tecnica classica di topologia algebrica, la "tesi Mayer-Vietoris", per dimostrare il seguente fatto chiave:

**Proposizione 2.2.4** Per  $p > 1$ , gli spazi vettoriali  $H^p(U_1 \cup U_2)$  e  $H^{p-1}(U_1 \cap U_2)$  sono isomorfi.

**Dimostrazione:** Sia  $\omega$  una  $p$ -forma chiusa su  $U_1 \cup U_2 = S^k$ . Poiché  $U_1$  è contraiabile, il punto 8. implica che la restrizione di  $\omega$  a  $U_1$  sia esatta; quindi  $\omega = d\phi_1$  su  $U_1$ . Allo stesso modo,  $\omega = d\phi_2$  su  $U_2$ . Ora, considero la  $(p-1)$  forma  $v = \phi_1 - \phi_2$  su  $U_1 \cap U_2$ . Poiché  $d\phi_1 = d\phi_2$  su  $U_1 \cap U_2$ ,  $v$  è chiusa. Quindi abbiamo una procedura per la produzione di  $(p-1)$  forme chiuse su  $U_1 \cap U_2$  partendo da forme chiuse su  $U_1 \cup U_2$ .

Questa procedura è facilmente reversibile. Trova le funzioni  $\rho_1$  e  $\rho_2$  su  $S^k$  in modo tale che  $\rho_1$  si annulli in un intorno del Polo Nord e  $\rho_2$  si annulli in un intorno del Polo Sud, ma  $\rho_1 + \rho_2 = 1$  ovunque. Ora, data una  $(p-1)$  forma  $v$  chiusa su  $U_1 \cap U_2$ , definisco la forma  $\phi_1$  su  $U_1$  come  $\rho_1 v$ . Sebbene  $v$  stesso possa saltare al Polo Nord,  $\rho_1$  lo sopprime, in modo che  $\phi_1$  sia definito in modo liscio su tutto  $U_1$ . Allo stesso modo, pongo  $\phi_2 = -\rho_2 v$  su  $U_2$ . Si noti che  $\phi_1 - \phi_2 = v$  su  $U_1 \cap U_2$ . Definisco una  $p$ -forma  $\omega$  su  $U_1 \cup U_2$  ponendo  $\omega = d\phi_1$  su  $U_1$  e  $\omega = d\phi_2$  su  $U_2$ . Poiché  $d\phi_1 - d\phi_2 = dv = 0$  su  $U_1 \cap U_2$ ,  $\omega$  è una forma liscia ben definita su tutta  $U_1 \cup U_2$ , ed è certamente chiusa.  $\square$

Ora abbiamo quasi finito.

$$H^p(U_1 \cup U_2) = H^p(S^k),$$

e dal punto 9. e dal lemma di Poincarè,

$$H^{p-1}(U_1 \cap U_2) \simeq H^{p-1}(S^{k-1}).$$

Quindi

$$H^p(S^k) \simeq H^{p-1}(S^{k-1}),$$

se  $p > 1$ .

Per concludere, ci manca da dimostrare che:

$$\dim H^1(S^1) = 1$$

e

$$H^1(S^k) = 0 \text{ per } k > 1.$$

Di questi due elementi omettiamo la dimostrazione.

Concludiamo questa sezione con la definizione della caratteristica di Eulero-Poincaré di una varietà differenziabile.

Sia  $X$  una varietà differenziabile compatta connessa orientabile di dimensione  $n$ . La caratteristica di Eulero-Poincaré  $\chi(X)$  di  $X$  è definita come

$$\chi(X) = \sum_{j=0}^n (-1)^j b_j(X),$$

dove  $b_j(X) = \dim H^j(X)$  sono detti numeri di Betti di  $X$ .

In particolare  $b_0(X) = b_n(X) = 1$ .

Osserviamo che nel caso  $\dim X = 2$  si ha  $b_0(X) = b_2(X) = 1$  e  $b_1(X) = 2g$  dove  $g$  è il genere di  $X$  e quindi  $\chi(X) = 2 - 2g$ .



## 2.3 Teorema di Stokes

Esiste una importante relazione tra gli operatori  $\int$  e  $d$  sulle forme e l'operazione  $\partial$  che a ciascuna varietà con bordo associa il suo bordo (importante perché  $\partial$  è un'operazione puramente geometrica e  $d$  e  $\int$  sono puramente analitici). In una dimensione, la relazione è annunciata dai teoremi fondamentali del calcolo, e in due e tre dimensioni è l'oggetto dei teoremi classici di Green, Gauss e Stokes. In generale, supponiamo che  $X$  sia una varietà  $k$ -dimensionale orientata e compatta con bordo, quindi  $\partial X$  è una varietà  $(k-1)$ -dimensionale con il bordo orientato.

**Teorema 2.3.1 Teorema di Stokes generalizzato.** *Se  $\omega$  è una qualsiasi  $(k-1)$ -forma liscia su  $X$ , allora*

$$\int_{\partial X} \omega = \int_X d\omega.$$

**Dimostrazione:** Entrambi i membri dell'equazione sono lineari in  $\omega$ , quindi possiamo assumere che  $\omega$  abbia un supporto compatto contenuto nell'immagine di una parametrizzazione locale  $h : U \rightarrow X$ , con  $U$  sottoinsieme aperto di  $\mathbf{R}^k$  o  $\mathbf{H}^k$ .

Inizio supponendo che  $U$  sia aperto in  $\mathbf{R}^k$ ;  $h(U)$  non interseca il confine. Quindi

$$\int_{\partial X} \omega = 0$$

e

$$\int_X d\omega = \int_U h^*(d\omega) = \int_U dv,$$

dove  $v = h^*\omega$ . Dato che  $v$  è una  $(k-1)$  forma in un  $k$ -spazio, possiamo scriverlo come

$$v = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_k.$$

Qui  $\widehat{dx}_i$  significa che il termine  $dx_i$  è omissso dal prodotto. Quindi

$$dv = \left( \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$$

e

$$\int_{\mathbf{R}^k} dv = \sum_i \int_{\mathbf{R}^k} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \cdots dx_k. \quad (2.2)$$

L'integrale su  $\mathbf{R}^k$  è calcolato come al solito da una sequenza iterata di integrali su  $\mathbf{R}$ , che può essere presa in qualsiasi ordine. Integro prima il termine  $i$ -esimo rispetto a  $x_i$ :

$$\int_{\mathbf{R}^{k-1}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 \cdots \widehat{dx}_i \cdots dx_k.$$

Ovviamente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i$$

è la funzione di  $x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_k$  che assegna a qualsiasi  $b_1, \dots, \widehat{b}_i, \dots, b_k$  il numero  $\int_{-\infty}^{\infty} g'(t) dt$ , dove  $g(t) = f_i(b_1, \dots, t, \dots, b_k)$ . Poiché  $v$  ha un supporto compatto,  $g$  scompare al di fuori di ogni intervallo sufficientemente ampio  $(-a, a)$  in  $\mathbf{R}^1$ . Pertanto il Teorema Fondamentale del Calcolo dà

$$\int_{-\infty}^{\infty} g'(t) dt = \int_{-a}^a g'(t) dt = g(a) - g(-a) = 0 - 0 = 0.$$

Quindi  $\int_X d\omega = 0$ , come desiderato.

Quando  $U \subset \mathbf{H}^k$ , l'analisi precedente funziona per ogni termine della (2) tranne l'ultimo. Dato che il bordo di  $\mathbf{H}^k$  è l'insieme in cui  $x_k = 0$ , l'ultimo integrale è

$$\int_{\mathbf{R}^{k-1}} \left( \int_0^{\infty} \frac{\partial f_k}{\partial x_k} dx_k \right) dx_1 \cdots dx_{k-1}.$$

Ora il supporto compatto implica che  $f_k$  si annulli se  $x_k$  è al di fuori di un ampio intervallo  $(0, a)$ , ma sebbene  $f_k(x_1, \dots, x_{k-1}, a) = 0$ ,  $f_k(x_1, \dots, x_{k-1}, 0) \neq 0$ . Quindi applicando il Teorema Fondamentale del Calcolo come sopra, otteniamo

$$\int_X d\omega = \int_{\mathbf{R}^{k-1}} -f_k(x_1, \dots, x_{k-1}, 0) dx_1 \cdots dx_{k-1}.$$

D'altra parte,

$$\int_{\partial X} \omega = \int_{\partial \mathbf{H}^k} v.$$

Poiché  $x_k = 0$  su  $\partial \mathbf{H}^k$ , anche  $dx_k = 0$  su  $\partial \mathbf{H}^k$ . Di conseguenza, se  $i < k$ , la forma  $(-1)^{i-1} f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_k$  è nulla su  $\partial \mathbf{H}^k$ . Quindi la restrizione di  $v$  a  $\partial \mathbf{H}^k$  è  $(-1)^{k-1} f(x_1, \dots, x_{k-1}, 0) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{k-1}$ , il cui integrale su  $\partial \mathbf{H}^k$  è quindi  $\int_{\partial X} \omega$ .

Ora  $\partial \mathbf{H}^k$  è naturalmente diffeomorfo a  $\mathbf{R}^{k-1}$  sotto l'ovvia funzione  $(x_1, \dots, x_{k-1}) \longrightarrow (x_1, \dots, x_{k-1}, 0)$ , ma questo diffeomorfismo non sempre porta il solito orientamento di  $\mathbf{R}^{k-1}$  all'orientamento al contorno di  $\partial \mathbf{H}^k$ . Sia  $e_1, \dots, e_k$  l'usuale base ordinata di  $\mathbf{R}^k$ , allora  $e_1, \dots, e_{k-1}$  è l'usuale base ordinata di  $\mathbf{R}^{k-1}$ . Poiché  $\mathbf{H}^k$  è il semispazio superiore, il versore esterno normale a  $\partial \mathbf{H}^k$  è  $-e_k = (0, \dots, 0, -1)$ . Pertanto, nell'orientamento al contorno di  $\partial \mathbf{H}^k$ , il segno della base ordinata  $\{e_1, \dots, e_{k-1}\}$  è definito come il segno della base ordinata  $\{-e_k, e_1, \dots, e_{k-1}\}$  nell'orientamento standard di  $\mathbf{H}^k$ . L'ultimo segno è facilmente visto come  $(-1)^k$ , quindi il solito diffeomorfismo  $\mathbf{R}^k \longrightarrow \partial \mathbf{H}^k$  altera l'orientamento di questo fattore  $(-1)^k$ .

Il risultato è la formula

$$\begin{aligned}\int_{\partial X} \omega &= \int_{\partial \mathbf{H}^k} (-1)^{k-1} f_k(x_1, \dots, x_{k-1}, 0) dx_1 \cdots dx_{k-1} \\ &= (-1)^k \int_{\mathbf{R}^{k-1}} (-1)^{k-1} f_k(x_1, \dots, x_{k-1}, 0) dx_1 \cdots dx_{k-1}.\end{aligned}$$

Poiché  $(-1)^k(-1)^{k-1} = -1$ , è esattamente la formula che abbiamo derivato per  $\int_X d\omega$ .

□

Il teorema di Stokes è essenziale perché fornisce un collegamento fondamentale tra analisi e topologia.



# Capitolo 3

## Il teorema di Gauss-Bonnet

### 3.1 Integrazione e grado

Data un'applicazione liscia  $f : X \rightarrow Y$ , con  $X$  e  $Y$  varietà senza bordo, della stessa dimensione e delle quali  $X$  compatta e  $Y$  connessa, si definisce *grado modulo 2* di  $f$ ,  $deg_2(f)$ , il numero dei punti modulo 2 della controimmagine di un valore regolare  $y \in Y$ . Questa definizione ha senso in quanto il numero di punti in questione per la scelta di  $X$  e  $Y$  è finito ed è lo stesso per ogni valore regolare. Se le varietà considerate sono anche orientate, ad ogni punto resta assegnato un numero di orientazione  $\pm 1$  e si definisce grado di  $f$ ,  $deg(f)$ , la somma dei numeri di orientazione dei punti della controimmagine di un valore regolare. La proprietà fondamentale del grado di un'applicazione, sia esso modulo 2 o orientato, è di essere un invariante omotopico.

La nostra applicazione principale del teorema di Stokes è il seguente teorema, che mette in relazione l'operazione analitica di integrazione con il comportamento topologico delle mappe.

**Formula del grado:** Sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione liscia tra di due varietà compatte e orientate di dimensione  $k$ , e sia  $\omega$  una  $k$ -forma su  $Y$ . Allora

$$\int_X f^* \omega = deg(f) \int_Y \omega.$$

Quindi l'applicazione  $f$  altera l'integrale di ogni forma attraverso un multiplo intero, che è  $deg(f)$  intero invariante puramente topologico.

Il teorema ha numerose applicazioni, una delle quali è il Principio dell'argomento.

**Teorema 3.1.1 (Principio dell'argomento)**

Sia

$$p(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m$$

un polinomio complesso, e  $\Omega$  sia una regione nel piano il cui confine liscio non contiene zeri di  $p$ . Allora il numero di zeri di  $p$  dentro  $\Omega$ , contando le molteplicità, è dato dall'integrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} d \arg p(z).$$

**Dimostrazione:** Ricordiamo che ogni numero complesso  $u$  diverso da zero può essere scritto come  $re^{i\theta}$ , dove  $r$  è la norma di  $u$  e  $\theta$  è, per definizione, il suo *argomento*:  $\theta = \arg(u)$ .  $\theta$  però non è una funzione ben definita: dato che  $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2\pi)}$ , tutti i valori  $\theta+2\pi n$  si qualificano per essere  $\arg(u)$ , dove  $n$  è un qualsiasi numero intero. Fortunatamente, l'ambiguità può essere dissipata passando alla derivata esterna, perché in un intorno adatto di qualsiasi punto possiamo sempre scegliere valori per  $\arg(u)$  in ogni punto in modo da ottenere una funzione liscia di  $u$ ; chiamiamolo  $\arg_0(u)$ . Quindi ogni altra funzione  $\phi(u)$  in quell'intorno che soddisfa la formula necessaria  $u = |u|e^{i\phi(u)}$  è uguale a  $\arg_0(u) + 2\pi n$  per alcuni interi  $n$ . Poiché  $\phi$  e  $\arg_0$  differiscono per una costante,  $d\phi = d \arg_0$ . Questa 1-forma liscia, definita su  $\mathbf{C} - \{0\}$ , è ciò che chiamiamo  $d \arg$ .

Sebbene la notazione suggerisca che è il differenziale di una funzione, vediamo che questa ipotesi è fuorviante; solo localmente esistono funzioni adeguate.

Nel principio dell'argomento, l'integrando è la 1-forma

$$z \longrightarrow d \arg p(z) = p^*(d \arg).$$

Questo integrando è definito e liscio sul piano complesso meno gli zeri di  $p$ . Poiché abbiamo già detto che gli zeri di  $p$  in  $\Omega$  sono contati dal grado della funzione  $f: \partial\Omega \longrightarrow S^1$ , dove

$$f(z) = \frac{p(z)}{|p(z)|} = e^{i \arg p(z)},$$

dobbiamo identificare l'integrale di  $d \arg p(z)$  con  $2\pi \deg(f)$ . Applichiamo la formula del grado alla restrizione della 1-forma  $d \arg$  a  $S^1$ . Se

$$u = f(z) = e^{i \arg p(z)},$$

allora  $\arg(u) = \arg p(z)$ . Poiché  $\arg p(z)$  è in realtà una funzione liscia, almeno localmente, otteniamo

$$d \arg p(z) = d[f^* \arg(u)] = f^* d \arg(u).$$

Così

$$\int_{\partial\Omega} d \arg p(z) = \deg(f) \int_{S^1} d \arg (u).$$

Calcolare l'integrale su  $S^1$  è banale. Ovviamente, la rimozione di un singolo punto da  $S^1$ , ad esempio  $w = 1$ , non cambierà l'integrale. Ma possiamo parametrizzare  $S^1 - \{1\}$  con  $\theta \rightarrow e^{i\theta}$ ,  $\theta \in (0, 2\pi)$ .

$\arg(u)$  è una funzione liscia su  $S^1 - \{1\}$  che richiama (pulls back?) l'identità  $\theta \rightarrow \theta$  su  $(0, 2\pi)$ . Perciò

$$\int_{S^1} d \arg (u) = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi,$$

e abbiamo finito. □

**Teorema 3.1.2** *Se  $X = \partial W$  e  $f : X \rightarrow Y$  si estende in modo liscio su tutto  $W$ , allora  $\int_X f^*\omega = 0$  per ogni  $k$ -forma  $\omega$  su  $Y$ .*

*(Qui  $X, Y, W$  sono compatti e orientati e  $k = \dim X = \dim Y$ ).*

**Dimostrazione:** Sia  $F : W \rightarrow Y$  un'estensione di  $f$ . Poiché  $F = f$  su  $X$ ,

$$\int_X f^*\omega = \int_{\partial W} F^*\omega = \int_W F^*d\omega.$$

Ma  $\omega$  è una  $k$ -forma su una varietà  $k$ -dimensionale, quindi  $d\omega = 0$ .

(Tutte le  $(k+1)$  forme sulle varietà  $k$ -dimensionali sono automaticamente 0). □

**Corollario 3.1.3** *Se  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  sono mappe omotopiche di varietà  $k$ -dimensionali orientate e compatte, allora per ogni  $k$ -forma  $\omega$  su  $Y$*

$$\int_X f_0^*\omega = \int_X f_1^*\omega.$$

**Dimostrazione:** Sia  $F : I \times X \rightarrow Y$  un'omotopia. Ora

$$\partial(I \times X) = X_1 - X_0,$$

dove  $X_1 = F(1, X)$  e  $X_0 = F(0, X)$ .

Quindi

$$0 = \int_{\partial(I \times X)} (\partial F)^*\omega = \int_{X_1} (\partial F)^*\omega - \int_{X_0} (\partial F)^*\omega.$$

Ma quando identifichiamo  $X_0$  e  $X_1$  con  $X$ ,  $\partial F$  diventa  $f_0$  su  $X_0$  e  $f_1$  su  $X_1$ . □

Una versione locale della formula del grado intorno ai valori regolari è stabilita molto facilmente e la sua dimostrazione mostra più concretamente il motivo per cui il fattore  $\deg(f)$  appare.

**Lemma 3.1.4** *Sia  $y$  un valore regolare della funzione  $f : X \rightarrow Y$  tra varietà  $k$ -dimensionali orientate. Quindi esiste un intorno  $U$  di  $y$  tale che la formula del grado*

$$\int_X f^* \omega = \deg(f) \int_U \omega$$

*è valida per ogni  $k$ -forma  $\omega$  con supporto in  $U$ .*

**Dimostrazione:** Poiché  $f$  è un diffeomorfismo locale in ogni punto nella controimmagine  $f^{-1}(y)$ , da conoscenze precedenti, sappiamo che  $y$  ha un intorno  $U$  tale che  $f^{-1}(U)$  consiste di insiemi aperti disgiunti  $V_1, \dots, V_N$ , e  $f : V_i \rightarrow U$  è un diffeomorfismo per ogni  $i = 1, \dots, N$ . Se  $\omega$  ha il supporto in  $U$ , allora  $f^* \omega$  ha il supporto in  $f^{-1}(U)$ ; quindi

$$\int_X f^* \omega = \sum_{i=1}^N \int_{V_i} f^* \omega.$$

Ma poiché  $f : V_i \rightarrow U$  è un diffeomorfismo, sappiamo che

$$\int_{V_i} f^* \omega = \sigma_i \int_U \omega,$$

il segno  $\sigma_i$  è  $\pm 1$ , a seconda che  $f : V_i \rightarrow U$  conservi o inverta l'orientazione. Ora, per definizione,  $\deg(f) = \sum \sigma_i$ , quindi abbiamo finito. □

Infine, dimostro la formula del grado in generale. Scelgo un valore regolare  $y$  per  $f : X \rightarrow Y$  e un intorno  $U$  di  $y$  come nel lemma. Con il Lemma di Isotopia fatto in precedenza, per ogni punto  $z \in Y$  possiamo trovare un diffeomorfismo  $h : Y \rightarrow Y$  che sia isotopico all'identità e che trasporti  $y$  in  $z$ . Allora la collezione di tutti gli insiemi aperti  $h(U)$ , dove  $h : Y \rightarrow Y$  è un diffeomorfismo isotopico all'identità, copre  $Y$ . Per compattezza, possiamo trovare finitamente molte mappe  $h_1, \dots, h_n$  tali che  $Y = h_1(U) \cup \dots \cup h_n(U)$ . Usando una partizione dell'unità, possiamo scrivere qualsiasi forma  $\omega$  come somma di forme, ciascuno con supporto in uno degli insiemi  $h_i(U)$ ; pertanto, poiché entrambi i membri della formula del grado

$$\int_X f^* \omega = \deg(f) \int_Y \omega$$

sono lineari in  $\omega$ , è sufficiente dimostrare la formula per le forme con supporto in alcune  $h(U)$ .

Supponiamo quindi che  $\omega$  sia una forma supportata in  $h(U)$ . Da  $h \sim \text{identità}$ , otteniamo  $h \circ f \sim f$ . Quindi il corollario di cui sopra implica

$$\int_X f^* \omega = \int_X (h \circ f)^* \omega = \int_X f^* h^* \omega.$$



Poiché  $h^*\omega$  è supportato in  $U$ , il lemma implica

$$\int_X f^*(h^*\omega) = \deg(f) \int_Y h^*\omega.$$

Infine, il diffeomorfismo  $h$  è preserva l'orientazione; per  $h \sim \text{identità}$  implica  $\deg(h) = +1$ . Quindi la proprietà del cambio delle variabili dà

$$\int_Y h^*\omega = \int_Y \omega,$$

e

$$\int_X f^*\omega = \deg(f) \int_Y \omega,$$

come affermato.

## 3.2 Il Teorema di Gauss-Bonnet

Iniziamo questa sezione con una discussione sul volume. Supponiamo che  $X$  sia una varietà  $k$ -dimensionale orientata e compatta in  $\mathbf{R}^N$ . Per ogni punto  $x \in X$ , sia  $v_X(x)$  l'elemento di volume su  $T_X(X)$ , cioè il  $k$ -tensore alternante che ha valore  $\frac{1}{k!}$  su ogni base ortonormale orientata positivamente per  $T_X(X)$ . La  $k$ -forma  $v_X$  su  $X$  è liscia ed è chiamata *forma di volume* di  $X$ . Ad esempio, la forma di volume su  $\mathbf{R}^k$  è  $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ . Il valore  $1/k!$  è reso necessario dal modo in cui abbiamo definito il prodotto esterno.

L'integrale  $\int_X v_X$  è definito come il *volume* di  $X$ . La forma di volume è preziosa perché fornisce un mezzo per integrare le funzioni. Se  $g$  è una funzione su  $X$ , allora  $gv_X$  è una  $k$ -forma su  $X$ , quindi possiamo definire  $\int_X g$  come  $\int_X gv_X$ . (Quando  $X$  è  $\mathbf{R}^k$ ,  $v_X = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ , in modo che  $\int_{\mathbf{R}^k} g$  sia il solito integrale). Naturalmente, forma di volume è geometrica, non topologica e dipende fortemente dal modo preciso in cui la varietà "siede" nello spazio euclideo. Di conseguenza, l'integrazione di funzioni non è un'operazione topologica naturale; non si trasforma correttamente sotto diffeomorfismi. (Per la maggior parte dei diffeomorfismi  $h: Y \rightarrow X$ , si ha  $\int_Y h^*g \neq \int_X g$ ).

La ragione per cui l'integrazione di funzioni si trasforma in modo improprio, come abbiamo già spiegato, è che il diffeomorfismo distorce il volume.

Possiamo misurare quantitativamente la distorsione con l'aiuto delle forme di volume. Infatti, se  $f: X \rightarrow Y$  è una qualsiasi funzione liscia di due varietà  $k$ -dimensionali con bordo, il pullback  $f^*v_Y$  è una  $k$ -forma su  $X$ . In ogni punto  $x \in X$ ,  $v_X(x)$  è una base per  $\Lambda^k[T_X(X)^*]$ , quindi  $(f^*v_Y)(x)$  deve essere un multiplo scalare di  $v_X(x)$ . Questo scalare è chiamato *Jacobiano* di  $f$  in  $x$  ed è denotato con  $J_f(x)$ .

Si noti che il tensore  $v_X(x)$  assegna a  $(v_1, \dots, v_k) \pm$  il volume del parallelepipedo che si estende nello spazio vettoriale  $T_X(X)$ , moltiplicato per quello scomodo fattore  $\frac{1}{k!}$ .  $(f^*v_Y)(x)$  assegna  $\pm$  il volume del parallelepipedo generato da  $df_X(v_1), \dots, df_X(v_k)$  in  $T_{f(X)}(Y)$ , moltiplicato per lo stesso fattore. Quindi la grandezza di  $J_f(x)$  è il fattore con cui  $df_X$  espande o contrae il volume; il suo segno riflette se  $df_X$  preserva o inverte l'orientazione. In questo senso,  $J_f$  misura ovunque il cambiamento infinitesimale del volume e dell'orientazione effettuata da  $f$ .

Applichiamo queste generalità per studiare la geometria delle *ipersuperfici*, sottovarietà  $k$ -dimensionali di  $\mathbf{R}^{k+1}$ .

L'ipersuperficie  $X$  è orientata se e solo se possiamo scegliere in modo liscio tra i due vettori normali unitari a  $X$  in ogni punto. Se, in particolare,  $X$  è un'ipersu-

perficie compatta, sappiamo dal Teorema di separazione di Jordan-Brouwer che  $X$  è orientabile come contorno del suo "dentro"; quindi possiamo semplicemente scegliere  $\vec{n}(x)$  come normale verso l'esterno.

La funzione  $g : X \rightarrow S^k$ , definita da  $g(x) = \vec{n}(x)$ , è chiamata *mappa di Gauss* della superficie orientata  $X$ , e il suo Jacobiano  $J_g(x) = \kappa(x)$  è chiamato *curvatura* di  $X$  in  $x$ . Ad esempio, se  $X$  è una  $k$ -sfera di raggio  $r$ , si ha  $\kappa(x) = \frac{1}{r^k}$  ovunque. Man mano che il raggio aumenta, la curvatura diminuisce, poiché le sfere grandi sono più piatte di quelle piccole. Naturalmente, quando  $X = \mathbf{R}^k$ , si ha  $\kappa = 0$ , poiché  $g$  è costante.

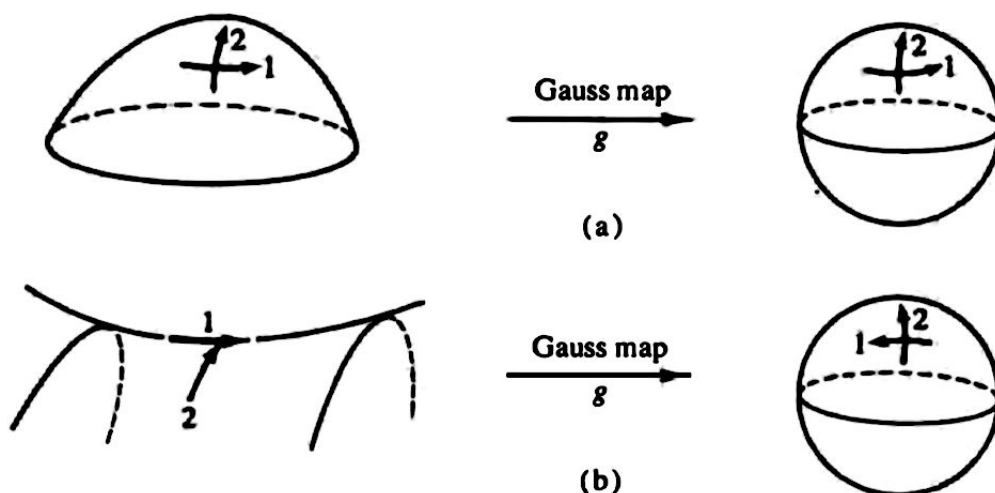


Figura 3.1: Orientazione mappa di Gauss

Quindi la grandezza di  $\kappa(x)$ , in un certo senso, misura quanto  $X$  è curva in  $x$ ; più lo spazio è curvo, più veloce sarà il vettore normale. Per le superfici, il segno di  $\kappa(x)$ , che indica se la mappa di Gauss è o no "non orientata", serve a distinguere tra l'aspetto locale convesso e l'aspetto locale a forma di sella: nella parte (a) della Figura 3.1, la mappa di Gauss conserva l'orientazione, mentre nella parte (b) inverte l'orientazione.

La curvatura è una caratteristica strettamente geometrica dello spazio e ovviamente non è preservata dalle trasformazioni topologiche. Uno dei più bei teoremi della matematica però implica che l'integrale globale della curvatura su ipersuperfici compatte di dimensione pari sia un invariante topologico. Quindi, indipendentemente da come torciamo o allunghiamo lo spazio, tutte le modifiche locali nella curvatura devono essere annullate. Inoltre, poiché  $\int_X \kappa$  è un invariante topologico globale di  $X$ , si può esprimere attraverso la caratteristica di Eulero.

**Teorema 3.2.1 Teorema di Gauss-Bonnet.** *Se  $X$  è una ipersuperficie compatta, di dimensione pari in  $\mathbf{R}^{k+1}$ , allora*

$$\int_X \kappa \nu_X = \frac{1}{2} \gamma_k \chi(X)$$

dove  $\chi(X)$  è la caratteristica di Eulero di  $X$  e la costante  $\gamma_k$  è il volume della  $k$ -sfera unitaria  $S^k$ .

Naturalmente, quando  $X$  ha dimensione dispari, la formula è falsa, poiché la caratteristica Eulero è automaticamente zero.

La prima parte della dimostrazione è un'applicazione della formula del grado per convertire l'integrale in un'espressione topologica.

$$\int_X \kappa \nu_X = \int_X J_g \nu_X = \int_X g^* \nu_{S^k} = \deg(g) \int_{S^k} \nu_{S^k} = \deg(g) \cdot \gamma_k.$$

Quindi, per dimostrare il teorema di Gauss-Bonnet, dobbiamo mostrare che il grado della mappa di Gauss è uguale alla metà della caratteristica di Eulero di  $X$ , cioè  $\deg(g) = \frac{1}{2} \chi(X)$ .

Scelgo un vettore unitario  $a \in S^k$  tale che sia  $a$  che  $-a$  siano valori regolari di  $g$ . Sia  $\vec{v}$  il campo vettoriale su  $X$  il cui valore in un punto  $x$  è la proiezione del vettore  $-a$  su  $T_X(X)$ :

$$\vec{v}(x) = (-a) - [-a \cdot \vec{n}(x)] \vec{n}(x) = [a \cdot g(x)] g(x) - a.$$

(Vedi Figura 3.2)

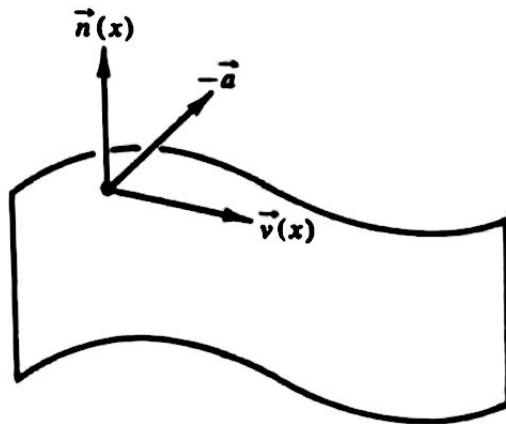


Figura 3.2: Campo vettoriale  $v$

Un punto  $z \in X$  è uno zero di  $\vec{v}$  se e solo se  $g(z) = \pm a$ . Poiché  $a$  e  $-a$  sono valori regolari di  $g$ , e  $X$  è compatto,  $\vec{v}$  ha solo un numero finito di zeri.

Indichiamo la funzione di traslazione  $y \rightarrow y - a$  in  $\mathbf{R}^{k+1}$  con  $T$ , quindi possiamo scrivere l'applicazione  $\vec{v} : X \rightarrow \mathbf{R}^{k+1}$  come  $\vec{v} = T \circ [a \cdot g]g$ .

**Lemma 3.2.2** *Se  $g(z) = a$ , allora  $d\vec{v}_z = dT_a \circ dg_z$ ; e se  $g(z) = -a$ , allora  $d\vec{v}_z = -dT_a \circ dg_z$ .*

**Dimostrazione:** Calcolo la derivata su  $z$  della funzione  $f : X \rightarrow \mathbf{R}^{k+1}$  definita da  $f(x) = [a \cdot g(x)]g(x)$ :

se  $w \in T_z(X)$ , il vettore  $df_z(w) \in \mathbf{R}^{k+1}$  è

$$df_z(w) = [a \cdot g(z)]dg_z(w) + [a \cdot dg_z(w)]g(z)$$

[Per verificare ciò, definisco  $w$  come la tangente alla curva  $c(t)$ , così che  $df_z(w)$  è la tangente alla curva  $f(c(t))$  e applico le solite regole del prodotto a ciascuna coordinata di  $f(c(t))$ ]. Poiché  $a \in S^k$ , il prodotto  $a \cdot a$  è uguale a 1; quindi  $[a \cdot g(z)]dg_z(w)$  è  $dg_z(w)$  se  $g(z) = +a$  e  $-dg_z(w)$  se  $g(z) = -a$ .

Per  $[a \cdot dg_z(w)]g(z)$ , differenziare la funzione costante  $g(x) \cdot g(x) = 1$  per mostrare che  $g(z) \cdot dg_z(w) = 0$ . (Questo risultato esprime semplicemente il fatto che l'immagine di  $dg_z$  è tangente a  $S^k$  in  $g(z)$ , quindi perpendicolare al vettore  $g(z)$ ). Di conseguenza, se  $g(z) = \pm a$ ,  $a \cdot dg_z(w) = 0$  e il secondo termine si annulla.

□

**Definizione 3.2.3** *Si dice **indice** di  $\vec{v}$  in  $z$  il grado topologico dell'applicazione  $u : \partial D \rightarrow S^{n-1}$  definita come  $u(x) = \frac{v(x)}{|v(x)|}$ , dove  $D$  è una palla centrata in  $z$  tale che  $z$  sia l'unico zero di  $\vec{v}$  in  $D$ .*

**Corollario 3.2.4** *L'indice del campo vettoriale  $\vec{v}$  al suo zero  $z$  è  $+1$  se  $g : X \rightarrow S^k$  mantiene l'orientazione su  $z$ , e  $-1$  se  $g$  inverte l'orientazione su  $z$ .*

**Dimostrazione:** Da conoscenze pregresse sappiamo che la derivata  $d\vec{v}_z : T_z(X) \rightarrow \mathbf{R}^{k+1}$  porta effettivamente  $T_z(X)$  in se stessa; inoltre, se  $d\vec{v}_z$  è un isomorfismo di  $T_z(X)$ , allora  $ind_z(\vec{v})$  è uguale al segno del determinante di  $d\vec{v}_z : T_z(X) \rightarrow T_z(X)$ .

Ora la funzione lineare  $dT_a : \mathbf{R}^{k+1} \rightarrow \mathbf{R}^{k+1}$  è semplicemente l'identità, quindi, considero come mappe lineari di  $T_z(X)$  in  $\mathbf{R}^{k+1}$ ,

$$d\vec{v}_z = \pm dg_z.$$

Innanzitutto, supponiamo che  $g(z) = +a$ , quindi  $d\vec{v}_z = +dg_z$ . Poiché

$$d\vec{v}_z : T_z(X) \rightarrow T_z(X)$$

e

$$dg_z : T_z(X) \longrightarrow T_a(S^k),$$

i due sottospazi  $T_z(X)$  e  $T_a(S^k)$  devono essere identici. Inoltre, hanno lo stesso orientamento, perciò la normale, unitaria e verso l'esterno, a  $X$  in  $z$  è  $\vec{n}(z) = g(z) = a$ , mentre la normale, unitaria e verso l'esterno, a  $S^k$  in  $a$  è  $a$  stessa.

Poiché  $a$  è un valore regolare di  $g$ , la funzione lineare  $dg_z = d\vec{v}_z$  è un isomorfismo. Dal momento che  $\det(d\vec{v}_z) = \det(dg_z)$ , l'esercizio implica che  $\text{ind}_z(\vec{v}) = +1$  se  $dg_z$  mantiene l'orientamento e  $-1$  se  $dg_z$  inverte l'orientamento.

Se  $g(z) = -a$ , allora  $d\vec{v}_z = -dg_z$ . Di nuovo, concludiamo che i due sottosistemi  $T_z(X)$  e  $T_{-a}(S^k)$  in  $\mathbf{R}^{k+1}$  sono identici, inclusi i loro orientamenti. La regolarità di  $-a$  implica che  $d\vec{v}_z$  sia un isomorfismo, quindi si applica l'esercizio. Qui

$$\det(d\vec{v}_z) = \det(-dg_z) = (-1)^k \det(dg_z),$$

che uguaglia ancora  $\det(dg_z)$ , perché  $k$  è pari. Quindi ancora,  $\text{ind}_z(\vec{v}) = +1$  se  $dg_z$  mantiene l'orientamento e  $-1$  se  $dg_z$  inverte l'orientamento. □

Enunciamo ora un importante lemma e il Teorema di Hopf-Poincaré, omettendo di entrambi la dimostrazione.

**Lemma 3.2.5** *Se  $\vec{v}$  è un campo vettoriale su  $X$  e  $g$  la mappa di Gauss, allora*

$$\sum_i \text{index}_{z_i}(v) = 2\text{deg}(g),$$

dove la somma degli indici è su tutti gli zeri isolati di  $\vec{v}$ .

**Teorema 3.2.6 (di Hopf-Poincaré)** *Siano  $X$  una varietà differenziabile compatta e  $v$  un campo vettoriale su  $X$  con zeri isolati. Se  $X$  ha la frontiera,  $v$  deve essere diretto normalmente e uscente rispetto alla frontiera.*

Allora vale la seguente formula

$$\sum_i \text{index}_{z_i}(v) = \chi(X).$$

Pertanto  $\chi(X) = 2\text{deg}(g)$  e il teorema di Gauss-Bonnet segue direttamente.

Dal momento che questo calcolo è un risultato famoso a sé stante, enunciamolo come un teorema.

**Teorema 3.2.7** *Per le varietà di dimensione pari, la caratteristica di Eulero è uguale al doppio del grado della mappa di Gauss.*

Un'ultima osservazione: si può dare una definizione alternativa della curvatura semplicemente usando le proprietà metriche di  $X$ . In dimensione due, questo fatto è stato realizzato da Gauss ed è chiamato *Teorema Egregio*.

Inoltre Chern ha fornito generalizzazione per varietà riemanniane compatte orientabili di dimensione pari.

**Teorema 3.2.8** {*Teorema di Gauss-Bonnet-Chern*} *Sia  $M$  una varietà riemanniana compatta orientabile di dimensione pari  $d$  e  $\Omega = \kappa(x)\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^d$ . Allora*

$$\int_M \Omega = \chi(M).$$





# Bibliografia

- [1] Victor Guillemin, Alan Pollack; Differential Topology; Englewood Cliffs; pp. 151-201; 1974.
- [2] Yin Li; The Gauss-Bonnet-Chern Theorem on Riemannian Manifolds; 2011; <http://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/li4.pdf>.
- [3] Andrea Loi; Appunti di Topologia Algebrica; <http://loi.sc.unica.it/algtop1314/appunti.pdf>.
- [4] Francesco Falqui; Il Teorema di Gauss-Bonnet; Tesi triennale, Università degli studi di Cagliari; 2016; <http://loi.sc.unica.it/tesi/tesiFalqui.pdf>.
- [5] Annalisa Bruno; La caratteristica di Eulero e il teorema di Hopf-Poincaré; Tesi triennale, Università degli studi di Ferrara; 2009; <https://digilander.libero.it/mathunife/Files/Eulero.pdf>.
- [6] Michela Zedda; Teoria del Grado e Applicazioni; Tesi magistrale, Università degli studi di Cagliari; 2006; <http://loi.sc.unica.it/tesi/tesiMZedda.pdf>.