



Università degli Studi di Cagliari  
Facoltà di Scienze  
Dipartimento di Matematica e Informatica

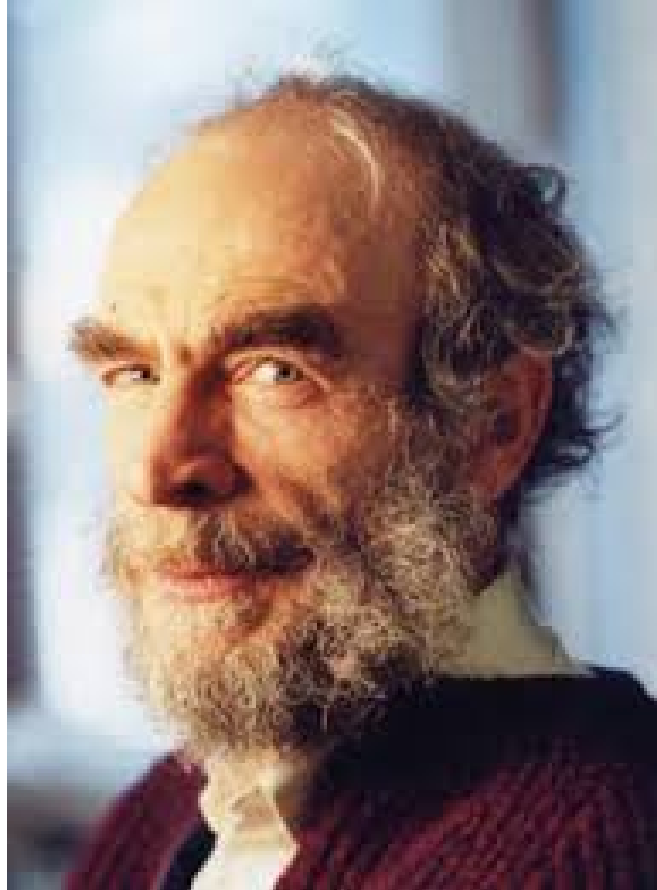
# Il Teorema non-squeezing di Gromov e le Capacità simplettiche

Relatore  
Prof. Andrea Loi

Tesi di Laurea Magistrale di  
Annalisa Sardu

Anno Accademico 2014/2015





Mikhail Gromov



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Algebra lineare simplettica</b>	<b>5</b>
1.1 Spazi vettoriali simplettici . . . . .	5
1.2 Il teorema di non-squeezing nel caso affine . . . . .	12
1.3 Lo spessore simplettico lineare . . . . .	15
<b>2 Varietà simplettiche</b>	<b>25</b>
2.1 Definizioni e primi esempi . . . . .	25
2.2 Strutture quasi complesse . . . . .	27
2.3 Varietà di Kähler . . . . .	32
2.3.1 Lo spazio proiettivo complesso . . . . .	34
2.3.2 Potenziali di Kähler e forme spaziali complesse . . . . .	37
2.3.3 Sottovarietà di Kähler . . . . .	39
<b>3 Simplettomorfismi</b>	<b>41</b>
3.1 Il Teorema di Darboux . . . . .	41
3.2 Il problema degli embedding simplettici . . . . .	44
3.3 Domini complessi invarianti per rotazioni . . . . .	47
3.4 Esempi . . . . .	53
3.5 Un altro esempio: la forma di Calabi . . . . .	57
<b>4 Il Teorema non-squeezing e le capacità simplettiche</b>	<b>59</b>
4.1 Il Teorema non-squeezing e il camello simplettico . . . . .	59

4.2	Capacità simplettiche: definizioni e prime proprietà . . . . .	62
4.3	Il Gromov width di una varietà simplettica . . . . .	67
4.4	Rigidità dei simplettomorfismi . . . . .	70

# Introduzione

La topologia simplettica è una branca della geometria simplettica relativamente giovane. Nasce ufficialmente nel 1985 in seguito alla pubblicazione, sull'autorevole rivista *Inventiones Mathematicae*, dell'articolo di Mikhail Gromov [5] che porge la dimostrazione del teorema conosciuto come il *Teorema non-squeezing*. Le tecniche matematiche utilizzate nell'articolo sono alquanto proibitive per chi non è specializzato nel settore, tuttavia lo scopo di questa tesi è quello di presentare gli aspetti e gli strumenti generali necessari a offrire un'introduzione alla disciplina e alla comprensione del teorema non-squeezing e si pone come ulteriore obbiettivo quello di essere il più autocontenuta possibile. Segue una breve presentazione matematica degli oggetti e degli argomenti più significativi, seguita da un sunto schematico sul contenuto dei quattro capitoli facenti parte della tesi.

Una *varietà simplettica* è una coppia  $(M, \omega)$  costituita da una varietà differenziabile  $M$  e da una 2-forma differenziale  $\omega$  chiusa e non degenere. La forma  $\omega$  è detta *forma simplettica* o *struttura simplettica*. Le condizioni imposte sulla forma  $\omega$  implicano che la varietà  $M$  sia orientabile e di dimensione pari. Il prototipo di varietà simplettica è  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ , ossia lo spazio Euclideo  $2n$ -dimensionale dotato della *forma simplettica standard*  $\omega_0 = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j$ . Le varietà simplettiche costituiscono il set-up naturale per lo sviluppo della meccanica Hamiltoniana e lo studio di tali varietà ha avuto un significativo ampliamento nel corso degli ultimi venti anni, tanto che la geometria simplettica e la topologia simplettica sono diventate delle materie di studio indipendenti e inaspettatamente si sono riscontrate anche ricche di connessioni con altre discipline, quali la geometria complessa e la geometria algebrica.

Un fatto notevole è che in geometria simplettica, a differenza per esempio della geometria Riemanniana, non esistono invarianti locali diversi dalla dimensione. In altre parole due varietà simplettiche della stessa dimensione sono localmente “indistinguibili” dal punto di vista simplettico. Questo fatto è espresso dal famoso Teorema di Darboux il quale asserisce che per ogni punto  $p$  di una varietà simplettica di dimensione  $2n$ , esiste un suo intorno aperto  $U$  e un simplettomorfismo  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , ossia un diffeomorfismo tale che  $\varphi^*\omega_0 = \omega|_U$ . Quindi le varietà simplettiche sono interessanti solo dal punto di vista globale ed è per questo motivo che è fondamentale studiare i simplettomorfismi o, più in generale, gli embedding simplettici tra due varietà simplettiche  $(M_1, \omega_1)$  e  $(M_2, \omega_2)$  della stessa dimensione (un’applicazione differenziabile  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  è simplettica se  $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$ ). Il caso più semplice da analizzare è quello in cui la prima varietà  $(M_1, \omega_1)$  è una palla aperta di  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  e  $(M_2, \omega_2) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ . A tale proposito si ha il famoso *Teorema non-squeezing* di Gromov [5] il quale asserisce che esiste un embedding simplettico dalla palla aperta  $B^{2n}(r)$  di centro l’origine e raggio  $r$  e il cilindro simplettico  $Z^{2n}(R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_1^2 + y_1^2 < R^2\}$  se e solo se  $r \leq R$ .

Si osservi che un embedding simplettico preserva i volumi. Quindi il teorema di Gromov mostra che l’inclusione dello spazio degli embedding tra  $B^{2n}(r)$  e  $Z^{2n}(R)$  che conservano i volumi in quello degli embedding simplettici, è stretta.

Il teorema non-squeezing non solo ha dato origine alla *topologia simplettica* ma ha costituito l’inizio della ricerca di invarianti simplettici globali. Nel 1990 H. Hofer and E. Zehnder, prendendo ispirazione dal lavoro di Gromov, hanno definito una classe importante di invarianti simplettici che hanno battezzato con il nome di *capacità simplettiche*. Una capacità simplettica è un’applicazione  $(M, \omega) \mapsto c(M, \omega)$  che associa ad una varietà simplettica  $(M, \omega)$  un numero reale non negativo o infinito che soddisfi gli assiomi seguenti.

**C1 (monotonia)**  $c(M, \omega) \leq c(N, \tau)$ , se esiste un embedding simplettico  $\varphi : (M, \omega) \rightarrow (N, \tau)$  tra due varietà  $(M, \omega)$  e  $(N, \tau)$  simplettiche della stessa dimensione;



**C2 (conformalità)**  $c(M, \alpha\omega) = |\alpha|c(M, \omega)$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;

**C3 (non banalità)**  $c(B^{2n}(1), \omega_0) = \pi = c(Z^{2n}(1))$ ,

dove  $B^{2n}(1)$  è la palla aperta di raggio unitario e  $Z^{2n}(1)$  è il cilindro simplettico unitario.

Il fatto che una capacità simplettica sia un invariante simplettico segue immediatamente dalla proprietà C1.

L'esistenza di una capacità simplettica non è un fatto banale. Si può infatti dimostrare che esiste (almeno) una capacità simplettica se e solo se vale il teorema non-squeezing di Gromov. Infatti, supponendo che  $c$  sia una capacità simplettica allora dalla C1 e dalla C3 si ottiene immediatamente che  $r \leq R$ . Viceversa, usando il teorema non-squeezing di Gromov si può dimostrare che il *Gromov width*  $w_G(M, \omega)$  di una varietà simplettica  $(M, \omega)$  definito come

$$w_G(M, \omega) = \sup\{\pi r^2 \mid \exists \text{ un embedding simplettico } \varphi : (B^{2n}(r), \omega_0) \rightarrow (M, \omega)\}$$

è effettivamente una capacità simplettica.

La tesi è suddivisa in quattro capitoli organizzati come segue.

Nel primo capitolo, dopo aver trattato le proprietà di base degli spazi vettoriali simplettici e del gruppo dei simplettomorfismi di  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ , viene fornita una dimostrazione del teorema non-squeezing nel caso affine, ed è definito il concetto di spessore simplettico lineare per sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^{2n}$ , inoltre si dimostra che lo spessore simplettico lineare di un ellissoide coincide con  $\pi r_1^2$  dove  $r_1 > 0$  rappresenta il minimo dello spettro simplettico dell'ellissoide.

Nel secondo capitolo vengono introdotte le varietà simplettiche e i loro legami con le strutture complesse. Viene anche descritto un insieme importante di varietà simplettiche costituito dalle varietà di Kähler, porgendo il caso dello spazio proiettivo complesso dotato della forma di Fubini-Study.

Il terzo capitolo è dedicato ai simplettomorfismi, agli embedding simplettici e alla dimostrazione del teorema di Darboux. Sono anche trattati esempi espliciti di embedding simplettici di domini complessi invarianti per rotazioni in  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  e si dimostra che la forma di Kähler di Calabi è globalmente simplettomorfa a

$(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ . Nel trattare gli esempi sopra citati, si è cercato, da una parte, di mettere in luce la difficoltà legata al problema degli embedding simplettici e dall'altra di fornire degli esempi concreti che raramente si trovano descritti in qualche libro di testo.

Nel quarto capitolo, dopo aver enunciato il teorema non-squeezing di Gromov e il teorema del Camello simplettico, vengono descritte alcune proprietà principali delle capacità simplettiche; si dimostra che il Gromov width di un ellissoide coincide con il suo spessore simplettico lineare e si dimostra che il Gromov width è una capacità simplettica. Infine, nell'ultimo paragrafo, si dimostra la rigidità dei simplettomorfismi, la quale porta naturalmente al concetto di *omeomorfismo simplettico*.

# Capitolo 1

## Algebra lineare симпlettica

### 1.1 Spazi vettoriali симпlettici

Uno **spazio vettoriale симпlettico**  $(V, \omega)$  è uno spazio vettoriale reale finito dimensionale  $V$  dotato di una forma bilineare  $\omega$  antisimmetrica e non degenere, cioè

$$\omega(u, v) = -\omega(v, u), \quad u, v \in V$$

e per ogni vettore non nullo  $u \in V$  esiste  $v \in V$  tale che  $\omega(u, v) \neq 0$ . Quest'ultima condizione è equivalente al fatto che l'applicazione

$$V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \omega(v, \cdot)$$

è un'isomorfismo lineare tra  $V$  e il suo spazio duale  $V^*$ . Uno spazio vettoriale симпlettico ha dimensione pari, come espresso dalla seguente:

**Proposizione 1.1.** *Sia  $(V, \omega)$  uno spazio vettoriale симпlettico. Allora  $\dim V = 2n$  per un certo numero naturale  $n$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $m = \dim V$ ,  $e_1, \dots, e_m$  una base di  $V$  e  $A$  la matrice a entrate reali  $m \times m$  che rappresenta la forma  $\omega$  rispetto a questa base, cioè

$$\omega(u, v) = x^T A y$$

dove  $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$  rappresentano le componenti (vettori colonna) di  $u$  e  $v$ , rispettivamente, rispetto alla base scelta. L'antisimmetria di  $\omega$  si traduce nella condizione

$A^T = -A$ . Supponiamo per assurdo che  $m$  sia dispari. Allora  $A$  è una matrice singolare. Infatti

$$\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^m \det(A) = -\det(A),$$

la quale implica  $\det(A) = 0$ . Sia  $y_0 \neq 0$  tale che  $Ay_0 = 0$  ( $y_0$  è l'autovettore della matrice  $A$  relativo all'autovalore nullo). Se  $v_0 \in V$  è il vettore non nullo le cui componenti rispetto alla base  $e_1, \dots, e_m$  sono date dal vettore  $y_0$  allora

$$\omega(u, v_0) = x^T Ay_0 = 0$$

per ogni  $u \in V$  in contrasto con il fatto che  $\omega$  sia non degenere. □

Il prototipo di spazio vettoriale simplettico è lo **spazio vettoriale simplettico standard**  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ , dove

$$\omega_0(u, v) = \langle J_0 u, v \rangle, \tag{1.1}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota il prodotto scalare euclideo in  $\mathbb{R}^{2n}$  e  $J_0$  è la matrice  $2n \times 2n$  definita come

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Osserviamo che  $\det J_0 \neq 0$  e siccome  $J_0^T = -J_0$  segue che la forma  $\omega_0$  è non degenere e antisimmetrica. Osserviamo anche che

$$J_0^T = J_0^{-1} = -J_0. \tag{1.3}$$

In particolare  $J_0^2 = -I_{2n}$  e

$$\omega_0(u, J_0 v) = \langle u, v \rangle.$$

Una **struttura complessa** su uno spazio vettoriale reale  $V$  di dimensione  $2n$  è un'applicazione lineare  $J : V \rightarrow V$  che soddisfa  $J^2 = -I_{2n}$ . Data una tale struttura,  $V$  diventa uno spazio vettoriale complesso di dimensione (complessa)  $n$  definendo

$$(\alpha + i\beta)v = \alpha v + \beta Jv, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad v \in V.$$

Quindi  $J_0$  è una struttura complessa su  $\mathbb{R}^{2n}$  compatibile con il prodotto scalare euclideo. Nell'esempio dello spazio vettoriale simplettico standard  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ , si può identificare  $\mathbb{R}^{2n}$  con  $\mathbb{C}^n$  nel modo usuale, ossia  $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  viene identificato con  $x + iy \in \mathbb{C}^n$ . Si deduce allora che l'applicazione lineare  $J_0$  corrisponde alla moltiplicazione per  $i$ .

Sia  $(V, \omega)$  uno spazio vettoriale simplettico. Si dice che un vettore  $v \in V$  è  $\omega$ -**ortogonale** ad un vettore  $u \in V$  e si scriverà  $u \perp v$ , se  $\omega(u, v) = 0$ . Se  $E$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ , si definisce il suo **complemento  $\omega$ -ortogonale** come

$$E^\perp = \{u \in V \mid \omega(u, v) = 0, \forall v \in V\}. \quad (1.4)$$

Si osservi che  $E^\perp$  è un sottospazio vettoriale di  $V$  e il fatto che  $\omega$  sia non degenere porge

$$\dim E + \dim E^\perp = \dim V. \quad (1.5)$$

Infatti, se  $e_1, \dots, e_m$  è una base di  $E$ , allora il sottospazio  $E^\perp$  è il nucleo dei funzionali  $\omega(e_j, \cdot) \in V^*$  linearmente indipendenti e quindi  $\dim E^\perp = \dim V - \dim E$ .

Dal momento che  $u \perp v$  è equivalente a  $v \perp u$  segue che

$$(E^\perp)^\perp = E. \quad (1.6)$$

Il concetto di  $\omega$ -ortogonalità in geometria simplettica differisce dal concetto di ortogonalità in geometria euclidea. Infatti  $E$  e  $E^\perp$  non sono complementari in generale. Per esempio, ogni vettore  $v \in V$  è  $\omega$ -ortogonale a se stesso in quanto  $\omega(v, v) = -\omega(v, v)$ . Quindi se  $\dim E = 1$  allora  $E \subset E^\perp$ . La restrizione della forma bilineare  $\omega$  ad un sottospazio  $E \subset V$  è antisimmetrica, ma in generale non è non degenere se e solo se

$$E \cap E^\perp = \{0\}, \quad (1.7)$$

come segue immediatamente dalla definizione.

Per la (1.5), la (1.7) vale se e solo se  $E$  e  $E^\perp$  sono  $\omega$ -ortogonali, cioè

$$E \oplus E^\perp = V.$$

Quindi un sottospazio vettoriale  $E$  di uno spazio simplettico  $(V, \omega)$  dotato della restrizione della forma  $\omega$  è esso stesso uno spazio simplettico se e solo se la (1.7) è soddisfatta. Se questo accade allora  $E$  è un **sottospazio simplettico** di  $(V, \omega)$ .

Se  $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ , denota la base canonica di  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  allora  $\omega_0(e_i, e_j) = \omega_0(f_i, f_j) = 0$  e  $\omega_0(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ .

La proposizione seguente mostra che in ogni spazio simplettico è possibile trovare una base che soddisfa la proprietà sopra espressa.

**Proposizione 1.2.** *Sia  $(V, \omega)$  uno spazio vettoriale simplettico e  $\dim V = 2n$ . Allora esiste una base  $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ , di  $V$  tale che  $\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0$  e  $\omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ .*

Una base come nella proposizione precedente è detta base **simplettica** (o **canonica**) dello spazio vettoriale simplettico  $(V, \omega)$ .

Prima di dimostrare la Proposizione 1.2 si osservi che se si scrive

$$u = \sum_{j=1}^n (x_j e_j + x_{n+j} f_j)$$

e

$$v = \sum_{j=1}^n (y_j e_j + y_{n+j} f_j)$$

rispetto ad una base canonica, allora è semplice vedere che

$$\omega(u, v) = \langle J_0 x, y \rangle, \quad x, y \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (1.8)$$

dove  $J_0$  è definita da (1.2). Inoltre i sottospazi  $V_j = \text{span}\{e_j, f_j\}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , sono simplettici e ortogonali tra loro per  $i \neq j$ . Segue che lo spazio  $V$  è la somma  $\omega$ -ortogonale

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n \quad (1.9)$$

di sottospazi simplettici 2-dimensionali. Rispetto a questa decomposizione la forma  $\omega$  è rappresentata in coordinate simplettiche dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

*Dimostrazione della Proposizione 1.2.* Sia  $e_1$  un vettore non nullo di  $V$ . Siccome  $\omega$  è non degenera esiste un  $u \in V$  tale che  $\omega(u, e_1) \neq 0$ . Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$  tale che se  $f_1 = \alpha u$  allora

$$\omega(f_1, e_1) = 1.$$

Non è difficile vedere, usando l'antisimmetria di  $\omega$ , che  $f_1$  e  $e_1$  sono linearmente indipendenti e quindi  $E = \text{span}\{f_1, e_1\}$  è un sottospazio simplettico di dimensione 2 di  $V$ . Se  $\dim V = 2$  la dimostrazione è completa. Se  $\dim V > 2$  si può applicare lo stesso ragionamento al sottospazio simplettico  $E^\perp$  di  $V$  e trovare una base simplettica desiderata in un numero finito di passi.  $\square$

**Osservazione 1.3.** L'esistenza di una base simplettica non ha una controparte per forme bilineari simmetriche.

Sia  $(V, \omega)$  uno spazio vettoriale simplettico. Un'applicazione lineare  $A : V \rightarrow V$  è detta **simplettica** (o **canonica**) se

$$A^*\omega = \omega.$$

La 2-forma  $A^*\omega$  su  $V$  è detta il **pull-back** della forma  $\omega$  tramite  $A$  ed è definita come

$$(A^*\omega)(u, v) = \omega(Au, Av).$$

Nello spazio simplettico standard  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  una matrice è simplettica se e solo se

$$\langle J_0 Au, Av \rangle = \langle J_0 u, v \rangle$$

o, equivalentemente,

$$A^T J_0 A = J_0. \quad (1.11)$$

Questa condizione implica immediatamente che  $(\det A)^2 = 1$ . In effetti  $\det A = 1$  come espresso dalla seguente:

**Proposizione 1.4.** *Sia  $A$  una matrice  $2n \times 2n$  simplettica. Allora  $\det A = 1$ . Conseguentemente  $A$  conserva il volume di  $\mathbb{R}^{2n}$ .*

*Dimostrazione.* Per la dimostrazione è utile usare il linguaggio delle forme differenziali. Si ricorda preliminarmente che nelle coordinate  $z_1, \dots, z_{2n} \in \mathbb{R}^{2n}$ , la forma bilineare  $dz_i \wedge dz_j$  in  $\mathbb{R}^{2n}$  è definita come

$$(dz_i \wedge dz_j)(u, v) = u_i v_j - u_j v_i, \quad u, v \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Quindi se  $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$  allora  $\omega_0$  si scrive come

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j. \quad (1.12)$$

Segue che la  $2n$ -forma

$$\Omega = \omega_0 \wedge \dots \wedge \omega_0 \quad (n \text{ volte})$$

in  $\mathbb{R}^{2n}$  è la forma volume

$$\Omega = n! dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n.$$

Se  $A$  è una matrice  $2n \times 2n$  a entrate reali allora, per la definizione di determinante,  $A^* \Omega = (\det A) \Omega$ . Se  $A$  è simplettica, cioè  $A^* \omega_0 = \omega_0$ , allora  $A^* \Omega = \Omega$  e quindi  $\det A = 1$ .  $\square$

Denotato con  $\text{Sp}(n)$  l'insieme delle matrici  $2n \times 2n$  a entrate reali che soddisfano la (1.11), la seguente proposizione mostra che il suddetto insieme è un gruppo, chiamato il **gruppo lineare simplettico**; questo gruppo è uno dei cosiddetti gruppi di Lie classici.

**Proposizione 1.5.** *Se  $A$  e  $B$  sono matrici simplettiche allora anche  $A^{-1}$ ,  $AB$ ,  $A^T$  e  $J_0$  sono matrici simplettiche.*



*Dimostrazione.* Siccome  $A$  e  $B$  sono simplettiche allora  $A^T J_0 A = J_0$  e  $B^T J_0 B = J_0$ . Segue che

$$(AB)^T J_0 AB = B^T A^T J_0 AB = B^T J_0 B = J_0,$$

la quale mostra che  $AB \in \text{Sp}(n)$ . Moltiplicando l'equazione  $A^T J_0 A = J_0$  per  $A^{-1}$  a destra e per  $(A^T)^{-1}$  a sinistra si ottiene  $J_0 = (A^T)^{-1} J_0 A^{-1}$  e quindi  $A^{-1} \in \text{Sp}(n)$ . Passando alle inverse dell'ultima relazione si ha  $J_0^{-1} = A J_0^{-1} A^T$  e siccome  $J_0^{-1} = -J_0$  si ottiene  $(A^T)^T J_0 A^T = J_0$  e quindi  $A^T \in \text{Sp}(n)$ . Infine la relazione  $J_0^T J_0 J_0 = J_0$  mostra che  $J_0 \in \text{Sp}(n)$ .  $\square$

Siano  $(V_1, \omega_1)$  e  $(V_2, \omega_2)$  sono due spazi vettoriali simplettici. Un'applicazione lineare  $A : V_1 \rightarrow V_2$  è detta **simplettica** se

$$A^* \omega_2 = \omega_1,$$

dove, per definizione,

$$(A^* \omega_2)(u, v) = \omega_2(Au, Av), \quad u, v \in V_1.$$

Segue immediatamente che  $A$  è iniettiva (se  $Au = Av$  allora  $0 = \omega_2(Au, Av) = \omega_1(u, v)$  che implica  $u = v$ ) e quindi  $\dim V_1 \leq \dim V_2$ .

La proposizione seguente mostra che due spazi vettoriali simplettici della stessa dimensione sono "indistinguibili".

**Proposizione 1.6.** *Siano  $(V_1, \omega_1)$  e  $(V_2, \omega_2)$  due spazi vettoriali simplettici della stessa dimensione. Allora esiste un isomorfismo  $A : V_1 \rightarrow V_2$  tale che  $A^* \omega_2 = \omega_1$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $(e_j, f_j)$  e  $(\hat{e}_j, \hat{f}_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , due basi simplettiche di  $(V_1, \omega_1)$  e  $(V_2, \omega_2)$  rispettivamente. Sia  $A : V_1 \rightarrow V_2$  l'applicazione lineare definita da  $Ae_j = \hat{e}_j$ ,  $Af_j = \hat{f}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Segue allora dalla definizione di base simplettica che  $A^* \omega_2 = \omega_1$ .  $\square$

**Corollario 1.7.** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale di dimensione  $2n$ . Una forma bilineare e antisimmetrica  $\omega$  su  $V$  è non degenera se e solo se la  $2n$ -forma  $\omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega$  ( $n$  volte) è non nulla.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $\omega$  sia degenere. Allora esiste un vettore non nullo  $v \in V$  tale che  $\omega(v, w) = 0$  per ogni  $w \in V$ . Scegliamo una base di  $V$  della forma  $v_1, v_2, \dots, v_{2n}$  con  $v_1 = v$ . Allora  $\omega^n(v_1, v_2, \dots, v_{2n}) = 0$ . Viceversa se  $\omega$  è non degenere (e quindi  $\omega$  è una forma simplettica), per la proposizione precedente esiste un'isomorfismo  $A : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow V$  tale che  $A^*\omega = \omega_0$ . Segue che  $A^*\omega^n = \omega_0^n$  e siccome  $\omega_0^n$  è non nulla allora lo sarà anche  $\omega^n$ .  $\square$

## 1.2 Il teorema di non-squeezing nel caso affine

Un **simplettomorfismo affine** di  $\mathbb{R}^{2n}$  è un'applicazione  $\psi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  della forma

$$\psi(z) = Az + z_0,$$

dove  $A \in \text{Sp}(n)$  e  $z_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ . Denotiamo con  $\text{AffSp}(n)$  il gruppo dei simplettomorfismi affini. Sia

$$B^{2n}(r) = \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid |x|^2 + |y|^2 < r^2\}$$

la palla aperta di raggio  $r$  e il cilindro simplettico

$$Z^{2n}(R) = \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_1^2 + y_1^2 < R^2\}$$

il cilindro aperto di raggio  $R$ . Il seguente teorema asserisce che  $B^{2n}(r)$  può essere embedded in  $Z^{2n}(R)$  tramite un simplettomorfismo affine solo se  $r \leq R$ :

**Theorem 1.8.** (*non-squeezing affine*) Sia  $\psi \in \text{AffSp}(n)$ . Se  $\psi(B^{2n}(r)) \subset Z^{2n}(R)$  allora  $r \leq R$ .

*Dimostrazione.* Si può assumere che  $r = 1$ . Infatti se  $\psi(B^{2n}(r)) \subset Z^{2n}(R)$  allora  $\phi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  definita da  $\phi(z) = \frac{1}{r}\psi(rz)$  è tale che  $\phi(B^{2n}(1)) \subset Z^{2n}(R)$ . Le ipotesi implicano che  $\psi(\overline{B^{2n}(1)}) \subset \overline{Z^{2n}(R)}$ , dove  $\overline{B^{2n}(1)}$  (risp.  $\overline{Z^{2n}(R)}$ ) denota la chiusura di  $B^{2n}(1)$  (risp. di  $Z^{2n}(R)$ ). Siano  $u$  e  $v$  le due colonne di  $A^T$  corrispondenti alla variabili  $x_1$  e  $y_1$  e  $a$  e  $b$  le due coordinate di  $z_0$  sempre rispetto

alle stesse variabili. L'ipotesi che  $\psi(z) = Az + z_0$  con  $z \in B^{2n}(1)$  sia tale che  $\psi(z) \in \overline{Z^{2n}(R)}$  implica che

$$(\langle u, z \rangle + a)^2 + (\langle v, z \rangle + b)^2 \leq R^2, \forall z \in \overline{B^{2n}(1)}.$$

In particolare

$$\sup_{|z|=1} (\langle u, z \rangle + a)^2 + (\langle v, z \rangle + b)^2 \leq R^2. \quad (1.13)$$

Si ha che

$$\omega_0(u, v) = \omega_0(A^T u, A^T v) = \omega_0(e_1, e_{n+1}) = \langle J_0 e_1, e_{n+1} \rangle = \langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle = 1.$$

Quindi

$$1 = \omega_0(u, v) = \langle J_0 u, v \rangle \leq |u||v|.$$

Senza ledere le generalità si può assumere  $|u| \geq 1$ . Se  $a \geq 0$  allora

$$1 \leq (|u| + a)^2 + (\langle v, \frac{u}{|u|} \rangle + b)^2 = (\langle u, \frac{u}{|u|} \rangle + a)^2 + (\langle v, \frac{u}{|u|} \rangle + b)^2 \leq R^2,$$

dove la disuguaglianza segue da (1.13) con  $z = \frac{u}{|u|}$ . Se invece  $a < 0$

$$1 \leq (-|u| + a)^2 + (\langle v, \frac{u}{|u|} \rangle + b)^2 = (\langle u, -\frac{u}{|u|} \rangle + a)^2 + (\langle v, \frac{u}{|u|} \rangle + b)^2 \leq R^2,$$

dove la disuguaglianza segue sempre da (1.13) con  $z = -\frac{u}{|u|}$ . Il teorema è dimostrato.  $\square$

La proprietà di non-squeezing lineare può essere espressa in termini di invarianti simplettici lineari come segue. Un insieme  $B \subset \mathbb{R}^{2n}$  è detto **palla simplettica lineare di raggio  $r$**  se è linearmente simplettomorfa a  $B^{2n}(r)$  (cioè esiste  $A \in Sp(n)$  tale che  $B = A(B^{2n}(r))$ ). Analogamente un sottoinsieme  $Z \subset \mathbb{R}^{2n}$  è chiamato **cilindro simplettico lineare** se esiste  $A \in Sp(n)$  e  $R > 0$  tale che  $Z = A(Z^{2n}(R))$ . In virtù del Teorema 1.8, dato un cilindro lineare simplettico  $Z$ , il numero  $R$  per il quale esiste  $A \in Sp(n)$  tale che  $Z = A(Z^{2n}(R))$  è un invariante simplettico lineare, chiamato il **raggio** di  $Z$ , come espresso dal seguente:

**Corollario 1.9.** *Due cilindri simplettici lineari  $Z$  e  $\hat{Z}$  di raggi  $R$  e  $\hat{R}$  rispettivamente, sono linearmente simplettomorfi se e solo se  $R = \hat{R}$ .*

*Dimostrazione.* Se  $R = \hat{R}$  allora l'identità è un simplettomorfismo lineare tra  $Z$  e  $\hat{Z}$ . Viceversa supponiamo che esista  $A \in \text{Sp}(n)$  tale che  $A(Z) = \hat{Z}$  e supponiamo per assurdo che  $R \neq \hat{R}$ , per esempio  $R < \hat{R}$ . Chiaramente  $B^{2n}(\hat{R}) \subset Z^{2n}(\hat{R})$ . Denotando con  $A_Z$  (risp.  $A_{\hat{Z}}$ ) la matrice in  $\text{Sp}(n)$  tale che  $Z = A_Z(Z^{2n}(R))$  (risp.  $\hat{Z} = A_{\hat{Z}}(Z^{2n}(\hat{R}))$ ) allora  $A_Z^{-1} \circ A^{-1} \circ A_{\hat{Z}} \in \text{Sp}(n)$  è tale che

$$(A_Z^{-1} \circ A^{-1} \circ A_{\hat{Z}})(B^{2n}(\hat{R})) \subset Z^{2n}(R).$$

Segue dal Teorema 1.8 che  $\hat{R} \leq R$ , di cui l'assurdo.  $\square$

Una matrice  $A \in M_{2n}(\mathbb{R})$  ha la **proprietà di non-squeezing lineare** se per ogni palla simplettica lineare  $B$  di raggio  $r$  e per ogni cilindro simplettico lineare  $Z$  di raggio  $R$  si ha:

$$A(B) \subset Z \Rightarrow r \leq R.$$

Il seguente teorema mostra che i simplettomorfismi lineari sono caratterizzati dalla proprietà di non-squeezing lineare. In effetti si deve aggiungere anche il caso di matrici **anti-simplettiche**: una matrice  $A \in M_{2n}(\mathbb{R})$  (ossia un'applicazione lineare) è **anti-simplettica** se  $A^*\omega_0 = -\omega_0$ .

**Theorem 1.10.** *Sia  $A \in M_{2n}(\mathbb{R})$  una matrice invertibile tale che sia  $A$  che  $A^{-1}$  soddisfino la proprietà di non-squeezing lineare. Allora  $A$  è simplettica o anti-simplettica.*

*Dimostrazione.* Si supponga per assurdo che  $A$  non sia né simplettica né antisimplettica. Quindi anche  $A^T$  non lo è ed esisteranno allora dei vettori  $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$  tali che

$$\omega_0(A^T u, A^T v) \neq \pm \omega_0(u, v).$$

Perturbando  $u$  e  $v$  e usando il fatto che  $A$  è non singolare si può anche porre che

$$\omega_0(u, v) \neq 0 \quad \text{e} \quad \omega_0(A^T u, A^T v) \neq 0.$$

Inoltre, sostituendo  $A$  con  $A^{-1}$  se necessario, si può assumere che

$$|\omega_0(A^T u, A^T v)| < |\omega_0(u, v)|.$$

Moltiplicando  $u$  per una costante opportuna e indicando sempre con  $u$  il vettore ottenuto si ha

$$0 < \lambda^2 = |\omega_0(A^T u, A^T v)| < \omega_0(u, v) = 1.$$

Possiamo quindi scegliere due basi simplettiche  $\{u_1, v_1, \dots, u_n, v_n\}$  e  $\{u'_1, v'_1, \dots, u'_n, v'_n\}$  tali che

$$u_1 = u, \quad v_1 = v, \quad u'_1 = \lambda^{-1} A^T u, \quad v'_1 = \pm \lambda^{-1} A^T v.$$

Sia  $B \in Sp(n)$  la matrice che porta la base standard  $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ , su  $\{u_1, v_1, \dots, u_n, v_n\}$  e sia  $B' \in Sp(n)$  la matrice che porta  $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ , su  $\{u'_1, v'_1, \dots, u'_n, v'_n\}$ . Allora la matrice

$$C = B'^{-1} A^T B$$

soddisfa

$$C e_1 = \lambda e_1, \quad C f_1 = \pm \lambda f_1.$$

Si ha quindi che la matrice  $C^T$  porta la palla unitaria  $B^{2n}(1)$  sul cilindro simplettico  $Z^{2n}(\lambda)$ . Ma  $\lambda < 1$  e quindi  $C^T = B^T A (B'^{-1})^T$  non soddisfa la proprietà di non-squeezing lineare. Segue che anche  $A$  non soddisfa questa proprietà, in contrasto con le ipotesi.  $\square$

### 1.3 Lo spessore simplettico lineare

Lo **spessore simplettico lineare** di un sottoinsieme (arbitrario)  $S \subset \mathbb{R}^{2n}$  è definito come

$$w_L(S) = \sup\{\pi r^2 \mid A(B^{2n}(r)) \subset S \text{ per qualche } A \in \text{AffSp}(n)\}. \quad (1.14)$$

Dal teorema di non-squeezing (Teorema 1.8) non è difficile verificare che lo spessore simplettico lineare ha le seguenti proprietà:

(**monotonia**) se  $A(S) \subset T$  per qualche  $A \in \text{AffSp}(n)$  allora  $w_L(S) \leq w_L(T)$ ;

(**conformalità**)  $w_L(\lambda S) = \lambda^2 w_L(S)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$ ;

(**non banalità**)  $w_L(B^{2n}(r)) = w_L(Z^{2n}(r)) = \pi r^2$ .

La non banalità implica che  $w_L$  è un invariante bidimensionale. Inoltre vale la seguente:

**Proposizione 1.11.** *Ogni applicazione lineare simplettica o anti-simplettica di  $\mathbb{R}^{2n}$  conserva lo spessore simplettico lineare.*

*Dimostrazione.* Sia  $S \subset \mathbb{R}^{2n}$  e  $A \in \text{Sp}(n)$ . Dalla monotonia segue che:  $w_L(S) \leq w_L(A(S))$ . Sempre dalla monotonia  $w_L(A(S)) \leq w_L(A^{-1}(A(S))) = w_L(S)$  e quindi  $w_L(S) = w_L(A(S))$ . Questo mostra che un'applicazione lineare simplettica conserva lo spessore simplettico lineare.

Per dimostrare che una matrice  $\hat{A}$  anti-simplettica conserva lo spessore simplettico lineare sarà sufficiente verificare che  $\hat{A}$  è invertibile e che

$$w_L(S) = \sup\{\pi r^2 \mid \hat{\psi}(B^{2n}(r)) \subset S \text{ per qualche } \hat{\psi} \in \widehat{\text{AffSp}}(n)\}. \quad (1.15)$$

dove  $\widehat{\text{AffSp}}(n)$  è l'insieme (che non è un gruppo) delle applicazioni affini antisimplettiche, ossia delle applicazioni  $\hat{\psi} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  della forma

$$\hat{\psi}(z) = \hat{A}z + z_0,$$

dove  $\hat{A}$  è anti-simplettica e  $z_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ . (Basta applicare un ragionamento simile a quello fatto per le applicazioni lineari simplettiche).

Il fatto che  $\hat{A}$  sia non singolare si dimostra come segue. La relazione  $\hat{A}^*\omega_0 = -\omega_0$  implica

$$\hat{A}^*\omega_0 \wedge \cdots \wedge \hat{A}^*\omega_0 = \hat{A}^*(\omega_0 \wedge \cdots \wedge \omega_0) = (\det \hat{A})\omega_0^n = (-1)^n\omega_0^n,$$

e quindi  $\det \hat{A} = (-1)^n$  (in particolare  $\hat{A}$  è invertibile).

Per dimostrare la (1.15) sia

$$\hat{w}_L(S) = \sup\{\pi r^2 \mid \hat{\psi}(B^{2n}(r)) \subset S \text{ per qualche } \hat{\psi} \in \widehat{\text{AffSp}}(n)\}. \quad (1.16)$$

Si vuole dimostrare che  $w_L(S) = \hat{w}_L(S)$ .

Sia  $A \in \text{Sp}(n)$  e  $T$  l'applicazione lineare

$$T : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, T(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, x_n, x_1, \dots, y_n)$$

che scambia  $x_1$  con  $y_1$ . Allora  $A \circ T$  è una matrice anti-simplettica

$$(A \circ T)^* \omega_0 = T^*(A^* \omega_0) = T^* \omega_0 = -\omega_0.$$

Inoltre  $A(B^{2n}(r)) = (A \circ T)(B^{2n}(r))$ . Si ha quindi che per ogni  $\psi \in \text{AffSp}(n)$ ,  $\psi(z) = Az + z_0$ ,  $A \in \text{Sp}(n)$ , si può associare l'applicazione  $\hat{\psi} \in \hat{\text{AffSp}}(n)$ ,  $\hat{\psi}(z) = \hat{A}(z) + z_0$ ,  $\hat{A} = A \circ T$  tale che  $\psi(B^{2n}(r)) = \hat{\psi}(B^{2n}(r))$ . Si deduce allora da (1.14) e (1.16) che  $w_L(S) \leq \hat{w}_L(S)$ . Analogamente se partiamo da  $\hat{\psi} \in \hat{\text{AffSp}}(n)$ ,  $\hat{\psi}(z) = \hat{A}z + z_0$ , dove  $\hat{A}$  è anti-simplettica, è possibile associare  $\psi \in \text{AffSp}(n)$ ,  $\psi(z) = Az + z_0$ ,  $A = \hat{A} \circ T \in \text{Sp}(n)$  e dedurre che  $\hat{w}_L(S) \leq w_L(S)$ . Le due disuguaglianze danno che  $w_L(S) = \hat{w}_L(S)$ , e questo conclude la dimostrazione della proposizione.  $\square$

In effetti il teorema seguente mostra il viceversa della proposizione precedente e cioè che un'applicazione lineare simplettica che conserva lo spessore lineare simplettico è simplettica o antisimplettica. Più precisamente è sufficiente restringersi ad una classe particolare di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^{2n}$ , gli ellissoidi. Un **ellissoide centrato nell'origine** è il sottoinsieme  $E \subset \mathbb{R}^{2n}$  dato da

$$E = \{w \in \mathbb{R}^{2n} \mid \sum_{i,j=1}^{2n} e_{ij} w_i w_j < 1\}, \quad (1.17)$$

dove  $(e_{ij}) \in M_{2n}(\mathbb{R})$  è una matrice simmetrica e definita positiva.  $B^{2n}(r)$  è un particolare ellissoide centrato nell'origine dove la matrice  $(e_{ij}) = \frac{1}{r} \delta_{ij}$ .

**Osservazione 1.12.** Sia  $E$  un ellissoide centrato nell'origine e  $(a_{ij}) = A \in M_{2n}(\mathbb{R})$  non singolare. Allora  $A(E)$  è un ellissoide centrato nell'origine. Infatti

$$A(E) = \{w \in \mathbb{R}^{2n} \mid \sum_{i,j,k,l=1}^{2n} a_{ik} e_{ij} a_{jl} w_k w_l < 1\},$$

e la matrice  $C = (c_{kl})$ ,  $c_{kl} = \sum_{i,j}^{2n} a_{ik} e_{ij} a_{jl}$  è definita positiva e simmetrica.

**Theorem 1.13.** *Sia  $A \in M_{2n}(\mathbb{R})$ . Allora le seguenti condizioni sono equivalenti.*

- (i) *La matrice  $A$  conserva lo spessore lineare simplettico degli ellissoidi centrati nell'origine.*

(ii) La matrice  $A$  è *simplettica* o *antisimplettica*, cioè  $A^*\omega_0 = \pm\omega_0$ .

*Dimostrazione.* La (ii) implica la (i). Infatti, dalla Proposizione 1.11, ogni applicazione lineare simplettica preserva lo spessore lineare simplettico di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^{2n}$  e quindi, in particolare degli ellissoidi centrati nell'origine. Sia per ipotesi vera la (i) e dimostriamo che  $A$  è invertibile e che sia  $A$  che  $A^{-1}$  soddisfano la proprietà di non-squeezing lineare. Questo implicherà la (ii) per il Teorema 1.10 e concluderà la dimostrazione del teorema.

Sia, per assurdo,  $A$  singolare. Allora  $A(B^{2n}(r))$ ,  $r > 0$ , è un insieme di  $\mathbb{R}^{2n}$  di volume nullo. In particolare  $A(B^{2n}(r))$  non potrà contenere una palla di raggio positivo e quindi  $w_L(A(B^{2n}(r))) = 0$ . D'altra parte  $w_L(B^{2n}(r)) = \pi r^2 \neq 0$ . Questo è in contrasto con la (i) e quindi  $A$  è invertibile.

Sia  $B$  una palla simplettica lineare di raggio  $r$  e  $Z$  un cilindro simplettico lineare di raggio  $R$  tali che  $A(B) \subset Z$ . Segue dalla monotonia dello spessore simplettico lineare che

$$\pi r^2 = w_L(B) = w_L(A(B)) \leq w_L(Z) = \pi R^2$$

e quindi  $r \leq R$ . Questo mostra che  $A$  soddisfa la proprietà di non-squeezing lineare.

Osserviamo infine che anche  $A^{-1}$  soddisfa la (i) in quanto

$$w_L(A^{-1}(E)) = w_L(A(A^{-1}(E))) = w_L(E),$$

per ogni ellissoide  $E$  centrato nell'origine (la prima uguaglianza segue dalla (i), essendo  $A^{-1}(E)$  un ellissoide centrato nell'origine per l'Osservazione 1.12). Quindi con lo stesso ragionamento di sopra si deduce che  $A^{-1}$  soddisfa la proprietà di non-squeezing lineare.  $\square$

Si vuole ora studiare in dettaglio l'azione del gruppo lineare simplettico sugli ellissoidi e calcolare il loro spessore lineare simplettico (si veda il Teorema 1.18).

Gli strumenti per dimostrare il Teorema 1.18 saranno, oltre al teorema di non-squeezing, i due lemmi seguenti. Il primo lemma (Lemma 1.14) è puramen-



te algebrico mentre il Lemma 1.16 fornisce un' interpretazione geometrica del Lemma 1.14.

**Lemma 1.14.** *Sia  $(V, \omega)$  uno spazio vettoriale simplettico e  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  un prodotto scalare. Allora esiste una base  $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$  di  $V$  che è  $g$ -ortogonale e  $\omega$ -standard. Inoltre la base può essere scelta in modo tale che:*

$$g(u_j, u_j) = g(v_j, v_j), \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (1.18)$$

*Dimostrazione.* Senza ledere le generalità, si può assumere  $V = \mathbb{R}^{2n}$  e  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  (il prodotto scalare euclideo). Quindi

$$\omega(z, w) = \langle z, Aw \rangle \quad (1.19)$$

dove  $A \in M_{2n}(\mathbb{R})$  è non degenere e  $A^T = -A$ . Perciò  $iA \in M_{2n}(\mathbb{C})$  è antihermitiana e quindi il suo spettro è costituito da  $2n$  autovalori puramente immaginari  $\pm i\alpha_j$ ,  $\alpha_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, n$  e esiste una base ortonormale di autovettori. Più precisamente esistono  $z_j, \bar{z}_j$ ,  $z_j = u_j + iv_j \in \mathbb{C}^{2n}$  tali che

$$Az_j = i\alpha_j z_j, \quad A\bar{z}_j = -i\alpha_j \bar{z}_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (1.20)$$

e

$$\bar{z}_j^T z_k = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, n. \quad (1.21)$$

Dalla (1.20) si ottiene:

$$A(u_j + iv_j) = Au_j + iAv_j = i\alpha_j(u_j + iv_j) = -\alpha_j v_j + i\alpha_j u_j$$

la quale implica

$$Au_j = -\alpha_j v_j, \quad Av_j = \alpha_j u_j. \quad (1.22)$$

Segue che

$$\begin{aligned} \alpha_j z_j^T z_k &= \alpha_j (u_j + iv_j)^T z_k = (Av_j - iAu_j)^T z_k = (v_j - iu_j)^T (-A)z_k = \\ &= (iu_j - v_j)^T i\alpha_k z_k = -(u_j + iv_j)^T \alpha_k z_k = -\alpha_k z_j^T z_k. \end{aligned}$$

E quindi

$$(\alpha_j + \alpha_k)z_j^T z_k = 0, \quad \forall j, k = 1, \dots, n.$$

Essendo  $\alpha_j \neq -\alpha_k$  si deduce che

$$z_j^T z_k = 0, \quad \forall j, k = 1, \dots, n. \quad (1.23)$$

La (1.21) e la (1.23) implicano

$$(u_j - iv_j)^T(u_k + iv_k) = (u_j^T u_k + v_j^T v_k) + i(u_j^T v_k - iv_j^T u_k) = 0, \quad j \neq k$$

$$(u_j + iv_j)^T(u_k + iv_k) = (u_j^T u_k - v_j^T v_k) + i(u_j^T v_k + iv_j^T u_k) = 0, \quad j \neq k.$$

Segue che

$$u_j^T v_k = u_j^T u_k = v_j^T v_k, \quad j \neq k. \quad (1.24)$$

Dalle (1.22) si ha:

$$\omega(u_j, v_j) = u_j^T A v_j = \alpha_j |u_j|^2 > 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

$$\omega(u_j, v_j) = -\omega(v_j, u_j) = -v_j^T A u_j = \alpha_j |v_j|^2 > 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Quindi

$$\omega(u_j, v_j) = \alpha_j |u_j|^2 = \alpha_j |v_j|^2, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.25)$$

Inoltre, dalle (1.24) si deduce:

$$\omega(u_j, v_k) = \omega(u_j, u_k) = \omega(v_j, v_k) = 0, \quad \forall j \neq k. \quad (1.26)$$

Riscalando gli  $u_j$  e i  $v_j$  (ossia moltiplicando  $u_j$  e  $v_j$  per  $\frac{1}{\sqrt{\alpha_j}}$  se necessario) si ottiene

$$\omega(u_j, v_j) = 1, \omega(u_j, v_k) = \omega(u_j, u_k) = \omega(v_j, v_k) = 0, \quad j \neq k.$$

e quindi  $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$  è una base  $\omega$ -simplettica. Inoltre dalla (1.19), dalla (1.26) e dalle (1.22) si ha

$$g(u_j, u_k) = g(v_j, v_k) = 0, \quad j \neq k$$

e

$$g(u_j, v_k) = 0, \quad \forall j, k$$

e quindi  $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$  è una base  $g$ -ortogonale. Infine dalla (1.25) e ricordando che  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ , si ottiene la (1.18):

$$g(u_j, u_j) = g(v_j, v_j) = \alpha_j^{-1} \omega(u_j, v_j), \forall j = 1, \dots, n.$$

□

**Osservazione 1.15.** Il lemma fornisce una dimostrazione alternativa dell'esistenza di una base canonica di  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  (cfr. Proposizione 1.2).

Data una  $n$ -upla  $r = (r_1, \dots, r_n)$  tale che  $0 < r_1 \leq \dots \leq r_n$ . Denotiamo con  $E(r)$  l'ellissoide centrato nell'origine dato da

$$E(r) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{j=1}^n \left| \frac{z_j}{r_j} \right|^2 < 1\}. \quad (1.27)$$

Il prossimo lemma mostra che ogni ellissoide centrato nell'origine è linearmente simplettomorfo ad un unico  $E(r)$ .

**Lemma 1.16.** *Sia  $E = \{w \in \mathbb{R}^{2n} \mid \sum_{i,j=1}^{2n} e_{ij} w_i w_j < 1\}$  un ellissoide centrato nell'origine. Allora esiste una  $n$ -upla  $r = (r_1, \dots, r_n)$  con  $0 < r_1 \leq \dots \leq r_n$  e  $A \in \text{Sp}(n)$  tale che  $A(E) = E(r)$ . Inoltre i numeri  $r_j$  sono univocamente determinati da  $E$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  il prodotto scalare su  $\mathbb{R}^{2n}$  dato da

$$g(v, w) = \sum_{i,j=1}^{2n} e_{ij} v_i w_j.$$

Allora

$$E = \{w \in \mathbb{R}^{2n} \mid g(w, w) \leq 1\}.$$

Per il Lemma 1.14 esiste un base  $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$  di  $\mathbb{R}^{2n}$  che è  $\omega_0$ -simplettica e  $g$ -ortogonale che possiamo assumere soddisfi

$$g(u_j, u_j) = g(v_j, v_j) = \frac{1}{r_j^2}.$$

Sia  $A \in \text{Sp}(n)$  la matrice simplettica che porta la base standard di  $\mathbb{R}^{2n}$  su questa base:

$$Az = \sum_{j=1}^n (x_j u_j + y_j v_j), \quad z = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n).$$

Quindi

$$g(Az, Az) = \sum_{j=1}^n \frac{x_j^2 + y_j^2}{r_j^2} = \sum_{j=1}^n \left| \frac{z_j}{r_j} \right|^2,$$

la quale implica  $A(E) = E(r)$ .

Dimostriamo ora l'unicità dell'ennupla  $r = (r_1, \dots, r_n)$  con  $0 < r_1 \leq \dots \leq r_n$ . Sia  $r' = (r'_1, \dots, r'_n)$  un'altra  $n$ -upla con  $0 < r'_1 \leq \dots \leq r'_n$ . Supponiamo che esista un simplettomorfismo lineare  $A = (a_{ij}) \in \text{Sp}(n)$  tale che  $A(E(r)) = E(r')$ ; si vuole dimostrare che  $r = r'$ . Se  $D(r)$  (risp.  $D(r')$ ) è la matrice diagonale  $D(r) = \text{diag}(r_1^{-1}, \dots, r_n^{-1}, r_1^{-1}, \dots, r_n^{-1})$  (risp.  $D(r') = \text{diag}(r'_1{}^{-1}, \dots, r'_n{}^{-1}, r'_1{}^{-1}, \dots, r'_n{}^{-1})$ ) allora

$$\langle D(r')Az, D(r')Az \rangle = \langle D(r')z, D(r')z \rangle, \quad \forall z \in E(r).$$

Segue che

$$A^T \Delta(r') A = \Delta(r),$$

dove  $\Delta(r)$  (risp.  $\Delta(r')$ ) è la matrice diagonale data da

$$\Delta(r) = \text{diag}(r_1^{-2}, \dots, r_n^{-2}, r_1^{-2}, \dots, r_n^{-2}).$$

(risp.  $\Delta(r') = \text{diag}(r'_1{}^{-2}, \dots, r'_n{}^{-2}, r'_1{}^{-2}, \dots, r'_n{}^{-2})$ ). Dalla (1.11) e cioè  $J_0 A^T = A^{-1} J_0$ , l'uguaglianza precedente è equivalente a

$$A^{-1} J_0 \Delta(r) A = J_0 \Delta(r')$$

e quindi  $J_0 \Delta(r)$  e  $J_0 \Delta(r')$  sono simili e, in particolare, hanno gli stessi autovalori. D'altra parte è facile vedere che gli autovalori di  $J_0 \Delta(r)$  sono  $\pm i r_1^{-2}, \dots, \pm i r_n^{-2}$  e quindi  $r = r'$ .  $\square$

Dal Lemma 1.16 possiamo definire lo **spettro simplettico** di un ellissoide  $E$  centrato nell'origine come l'unica  $n$ -upla  $r = (r_1, \dots, r_n)$  tale che  $0 < r_1 \leq \dots \leq r_n$  tale che  $E$  è linearmente simplettomorfo a  $E(r)$ . Lo spettro è invariante rispetto a trasformazioni lineari simplettiche e due ellissoidi di  $\mathbb{R}^{2n}$  centrati nell'origine sono linearmente simplettomorfi se e solo se hanno lo stesso spettro simplettico.

**Osservazione 1.17.** Il volume di un ellissoide  $E$  con spettro  $r = (r_1, \dots, r_n)$  può essere calcolato come

$$\text{Vol}(E) = \text{Vol}(E(r)) = \int_E \frac{\omega_0^n}{n!} = \frac{\pi^n}{n!} \prod_{j=1}^n r_j^2,$$

dove la prima uguaglianza segue dal fatto che  $E$  e  $E(r)$  sono linearmente simplettomorfi e quindi hanno lo stesso volume, mentre l'ultima uguaglianza è un semplice calcolo che si può ottenere usando coordinate polari.

Si può ora calcolare lo spessore lineare simplettico di un ellissoide.

**Theorem 1.18.** *Sia  $E \subset \mathbb{R}^{2n}$  un ellissoide centrato nell'origine con spettro simplettico  $0 < r_1 \leq \dots \leq r_n$ . Allora*

$$w_L(E) = \pi r_1^2.$$

*Dimostrazione.* Sia  $r = (r_1, \dots, r_n)$  con  $0 < r_1 \leq \dots \leq r_n$  lo spettro simplettico di  $E$ . Per il Lemma 1.14 esiste  $A \in \text{Sp}(n)$  tale che  $A(E) = E(r)$ . Si osservi che

$$B^{2n}(r_1) \subset E(r) \subset Z^{2n}(r_1).$$

La monotonia e la non banalità dello spessore lineare simplettico implicano

$$\pi r_1^2 = w_L(B^{2n}(r_1)) \leq w_L(E(r)) \leq w_L(Z^{2n}(r_1)) = \pi r_1^2$$

e quindi dal Lemma 1.16

$$w_L(E) = w_L(E(r)) = \pi r_1^2.$$

□

**Osservazione 1.19.** Il Teorema 1.18 (e il Lemma 1.16) valgono anche per gli ellissoidi chiusi ossia per  $\bar{E}$ , dove  $E$  è un ellissoide centrato nell'origine. Nel caso particolare in cui sia  $n = 1$ , il Lemma 1.16 mostra che data un'ellisse in  $\mathbb{R}^2$  esiste una trasformazione lineare invertibile che rispetta le aree e che porta l'ellisse in un cerchio centrato nell'origine (in questo caso lo spettro dell'ellisse è il raggio del cerchio).



# Capitolo 2

## Varietà simplettiche

### 2.1 Definizioni e primi esempi

Una **struttura simplettica** o **forma simplettica** su una varietà differenziabile  $M$  è una 2-forma  $\omega \in \Omega^2(M)$  che soddisfa le due condizioni seguenti:

- $\omega$  è chiusa, cioè  $d\omega = 0$ .
- $\omega$  è non degenere.

La prima condizione può essere espressa equivalentemente come segue: per ogni coppia di superfici di  $M$ ,  $S$  e  $S'$  con lo stesso bordo  $\partial S = \partial S' \neq \emptyset$

$$\omega(S) := \int_S \omega = \int_{S'} \omega := \omega(S').$$

In effetti la condizione che la 3-forma  $d\omega \in \Omega^3(M)$  sia nulla fa sì che le varietà simplettiche siano il set-up naturale per generalizzare la meccanica Hamiltoniana dello spazio euclideo alle varietà differenziabili. Per maggiori dettagli sui legami tra il formalismo hamiltoniano e la geometria simplettica, il lettore interessato può consultare il libro [1] di V.I. Arnold.

Il fatto che  $\omega$  sia non degenere significa che per ogni  $x \in M$  la forma bilineare

$$\omega_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$$

(ottenuta valutando  $\omega$  in  $x \in M$ ) è non degenera <sup>1</sup>.

Una **varietà simplettica** è una coppia  $(M, \omega)$  costituita da una varietà differenziabile  $M$  e da una struttura simplettica  $\omega$ .

Dalla Proposizione 1.1 e dal Corollario 1.7 si ottiene quindi che ogni varietà simplettica ha dimensione pari, diciamo  $2n$ , e che la  $2n$ -forma

$$\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega \quad (n \text{ volte})$$

non è mai nulla. L'esistenza di una forma non nulla di grado massimo ( $2n$ ) implica che ogni varietà simplettica è orientabile.

**Esempio 2.1.** Il prototipo di varietà simplettica è  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ , dove  $\omega_0 = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j$  (cfr. (1.12)).

**Esempio 2.2.** La sfera unitaria  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  può essere dotata della 2-forma, definita da

$$\omega_x(u, v) = \langle x, u \wedge v \rangle, \quad x \in S^2, u, v \in T_x S^2,$$

dove  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota il prodotto scalare standard e  $u \wedge v$  il prodotto vettoriale in  $\mathbb{R}^3$ . La forma  $\omega$  è chiusa (una 2-forma in una varietà di dimensione 2 è sempre chiusa in quanto non esistono 3-forme non nulle su una superficie). Inoltre  $\omega$  è non degenera. Infatti, se per assurdo  $\omega$  fosse degenera allora dovrebbe esistere  $u \in \mathbb{R}^3$  non nullo tale che  $\langle x, u \wedge v \rangle = 0$  per ogni  $v \in \mathbb{R}^3$ . Scegliendo  $v \in \mathbb{R}^3$  tale che  $u \wedge v = x$  si ha  $\langle x, x \rangle = 0$  in contrasto con  $\langle x, x \rangle = 1$ . Non è difficile vedere che nelle coordinate  $x$  e  $y$ , date dalla proiezione stereografica dal polo nord, la forma  $\omega$  si scrive (localmente) come (un multiplo di):

$$\omega = \frac{dx \wedge dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}. \quad (2.1)$$

**Esempio 2.3.** Sia  $B^2(1) = \{x^2 + y^2 < 1\}$  la palla unitaria aperta di  $\mathbb{R}^2$ . Allora si verifica facilmente che la 2-forma

$$\omega_{hyp} = \frac{dx \wedge dy}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

definisce una struttura simplettica su  $B^2(1)$  chiamata la **forma iperbolica**.

---

<sup>1</sup>Se  $u, v \in T_x M$  allora  $\omega_x(u, v)$  rappresenta intuitivamente l'area col segno del parallelogramma infinitesimale generato da  $u$  e  $v$ .



**Esempio 2.4.** Sia  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  il toro. La forma  $\omega_0$  è invariante per traslazioni,  $(x, y) \mapsto (x + m, y + n)$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ , e induce quindi una 2-forma, che verrà denotata ancora con  $\omega_0$ , su  $\mathbb{T}^2$ . La forma  $\omega_0$  è chiusa (2-forma in una superficie). Dal momento che  $\mathbb{T}^2$  è localmente diffeomorfo a  $\mathbb{R}^2$  segue facilmente che  $\omega_0$  è non degenera. Quindi  $(\mathbb{T}^2, \omega_0)$  è una varietà simplettica. La forma  $\omega_0$  è chiamata la **forma simplettica piatta**.

Dal momento che una varietà simplettica ha dimensione pari ed è orientabile viene naturale porsi la seguente domanda:

**Domanda:** *Esistono varietà differenziabili di dimensione pari e orientabili che non ammettono strutture simplettiche?*

La proposizione che segue fornisce una risposta positiva.

**Proposizione 2.5.** *La sfera unitaria  $S^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$  ammette una struttura simplettica se e solo se  $n = 1$ , cioè solo nel caso di  $S^2$ .*

*Dimostrazione.* Se  $n = 1$  allora la struttura simplettica è quella dell'Esempio 2.2. Sia per assurdo  $n > 1$  e sia  $\omega$  una forma simplettica su  $S^{2n}$ . In particolare  $d\omega = 0$  e quindi ha senso considerare la classe di de Rham  $[\omega] \in H_{dR}^2(S^{2n})$  di  $\omega$ . D'altra parte se  $n \neq 1$  si ha  $H_{dR}^2(S^{2n}) = \{0\}$  e quindi  $[\omega] = 0$ . Ciò significa che  $\omega$  è esatta e quindi esiste una 1-forma  $\alpha \in \Omega^1(S^{2n})$  tale che  $\omega = d\alpha$ . Segue allora che  $\omega^n = d\beta$ , dove  $\beta = \alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} \in \Omega^{2n-1}(S^{2n})$  e quindi, per il Teorema di Stokes

$$\int_{S^{2n}} \omega^n = \int_{S^{2n}} d\beta = \int_{\partial S^{2n}} \beta = \int_{\emptyset} \beta = 0.$$

in contrasto con il fatto che  $\omega^n$  sia una forma non nulla e quindi  $\int_{S^{2n}} \omega^n \neq 0$ .  $\square$

## 2.2 Strutture quasi complesse

Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $2n$ . Una **struttura quasi complessa** su  $M$  è una struttura complessa  $J$  nel fibrato tangente  $TM$ . Questo significa che  $J = \{J_x\}_{x \in M}$  è una famiglia liscia di endomorfismi dello spazio tangente  $J_x : T_x M \rightarrow T_x M$  tale che  $J_x^2 = -id_{T_x M}$ . Non tutte le varietà di dimensione

pari ammettono una struttura quasi complessa. Per esempio si può dimostrare che  $S^2$  e  $S^6$  sono le sole sfere che ammettono una struttura quasi complessa.

**Esempio 2.6.** Ogni superficie orientabile  $S \subset \mathbb{R}^3$  ammette una struttura quasi complessa  $J$ , ottenuta dal prodotto vettoriale

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto u \wedge v.$$

Infatti, se  $N : S \rightarrow S^2$  denota l'applicazione di Gauss che associa a ogni  $x \in S$  il vettore normale uscente  $N(x) \perp T_x S$ , si ha che la struttura quasi complessa è definita dalla formula

$$J_x u = N(x) \wedge u.$$

Sia  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  la metrica Riemanniana su  $S$  (prima forma fondamentale) indotta dal prodotto scalare di  $\mathbb{R}^3$  e sia  $\omega$  la 2-forma su  $S$  definita da

$$\omega_x(u, v) = \langle N(x), u \wedge v \rangle.$$

Allora  $\omega$  è una forma simplettica che generalizza quella dell'Esempio 2.2.

Il legame tra le strutture simplettiche e le strutture complesse è espresso dalla seguente:

**Proposizione 2.7.** *Sia  $(M, \omega)$  una varietà simplettica. Allora esiste una struttura quasi complessa  $J$  su  $M$  e una metrica Riemanniana  $g$  su  $M$  tale che:*

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad (2.2)$$

dove  $\mathfrak{X}(M)$  denota lo spazio dei campi di vettori su  $M$ .

Segue dalla simmetria di  $g$  che

$$\omega(JX, JY) = \omega(X, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

e quindi, per ogni  $x \in M$ ,  $J_x$  è un'applicazione simplettica dello spazio vettoriale simplettico  $(T_x M, \omega_x)$ . Inoltre

$$J_x^* = J_x^{-1} = -J_x,$$

dove  $J_x^*$  è l'aggiunta di  $J_x$  rispetto al prodotto scalare  $g_x$ . Il prototipo di struttura complessa  $J_0$  su  $\mathbb{R}^{2n}$  è descritta nel primo capitolo (si vedano anche le (1.3)) e vale la relazione

$$\omega_0(u, v) = \langle Ju, v \rangle, \quad u, v \in \mathbb{R}^{2n},$$

dove  $\omega_0$  è la forma simplettica standard e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  è il prodotto scalare euclideo su  $\mathbb{R}^{2n}$  (si la veda (1.8)).

*Dimostrazione della Proposizione 2.7.* Sia  $\hat{g}$  una qualunque metrica Riemanniana su  $M$ . Fissato un punto  $x \in M$  verrà costruita  $J_x$  in  $T_xM$ . Dal momento che  $\omega_x$  è non degenere esiste un unico isomorfismo lineare  $A_x : T_xM \rightarrow T_xM$  tale che:

$$\omega_x(u, v) = \hat{g}_x(A_x u, v), \quad u, v \in T_xM.$$

L'antisimmetria di  $\omega_x$  implica:

$$\hat{g}_x(A_x u, v) = \omega_x(u, v) = -\omega_x(v, u) = -\hat{g}_x(A_x v, u) = -\hat{g}_x(v, A_x^* u) = \hat{g}_x(-A_x^* u, v),$$

dove  $A_x^*$  è la  $\hat{g}$ -aggiunta di  $A_x$ . Segue che

$$A_x^* = -A_x.$$

Quindi

$$A_x^* A_x = A_x A_x^* = -A_x^2$$

è un'applicazione definita positiva,  $\hat{g}$ -autoaggiunta e si denota con  $Q_x = \sqrt{-A_x^2}$  la radice positiva di  $-A_x^2$ . Si definisca

$$J_x = A_x Q_x^{-1}.$$

Dal momento che  $A_x$  e  $A_x^*$  commutano,  $A_x$  è un operatore normale e, conseguentemente,  $A_x$  e  $Q_x^{-1}$  commutano. Segue che

$$J_x^2 = A_x Q_x^{-1} A_x Q_x^{-1} = A_x^2 (-A_x^2)^{-1} = -id_{T_xM}.$$

Infine

$$\omega_x(u, J_x v) = \hat{g}_x(A_x u, J_x v) = \hat{g}_x(A_x u, A_x Q_x^{-1} v)$$

$$= \hat{g}_x(A_x^* A_x u, Q_x^{-1} v) = \hat{g}_x(Q_x^2 u, Q_x^{-1} v) = \hat{g}_x(Q_x u, v).$$

Siccome  $Q_x$  è simmetrica e definita positiva si deduce che

$$g_x(u, v) := \hat{g}(Q_x u, v)$$

definisce una metrica Riemanniana su  $M$  che soddisfa la condizione richiesta (almeno nel punto  $x$ ). Siccome la costruzione precedente dipende in modo liscio da  $x$ , questo conclude la dimostrazione della proposizione.  $\square$

**Osservazione 2.8.** La struttura complessa descritta nella proposizione precedente non è unica. Se si denota con  $\mathcal{J}_\omega$  lo spazio di tutte le strutture quasi complesse **compatibili** con  $\omega$  e cioè  $J \in \mathcal{J}_\omega$  se e solo se vale la (2.2), allora non è difficile vedere che questo spazio è contraibile. Infatti, per ogni  $J \in \mathcal{J}_\omega$  esiste (per definizione) un' unica metrica Riemanniana  $g_J$  tale che  $\omega(X, Y) = g_J(X, Y)$ . D'altra parte, a partire da una qualunque metrica Riemanniana  $g$  su  $M$ , nella dimostrazione della proposizione si costruisce una struttura quasi complessa  $J = J_g$  e quindi una metrica  $g_J$  tale che  $J_{g_J} = J$ . Quindi, fissata una metrica Riemanniana  $g^*$  su  $M$  possiamo definire la contrazione  $F : \mathcal{J}_\omega \times I \rightarrow \mathcal{J}_\omega$ ,  $I = [0, 1]$ , come

$$F(J, t) = J_{(1-t)g_J + tg^*}.$$

## Integrabilità

Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $2n$ . Una struttura quasi complessa  $J$  su  $M$  è detta **integrabile** se esiste un atlante  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  su  $M$  tale che

$$d\varphi_\alpha \circ J_x = J_0 \circ d\varphi_\alpha.$$

Un tale atlante è chiamato **atlante olomorfo**. A parole, la struttura quasi complessa  $J$  è rappresentata in coordinate locali dalla struttura standard  $J_0$  di  $\mathbb{R}^{2n}$ . Questo implica che le funzioni di transizione commutino con  $J_0$ :

$$d(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(z) \in \text{GL}(n, \mathbb{C}), \quad z \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta).$$

Quindi le funzioni di transizione  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$  sono olomorfe. Viceversa, se le funzioni di transizione sono olomorfe allora l'endomorfismo

$$J_x : T_x M \rightarrow T_x M, \quad x \in M$$

definito come

$$J_x[(\varphi_\alpha, u)] = [(\varphi_\alpha, J_0 u)]$$

è una struttura quasi complessa su  $M$ . Qui si pensa lo spazio tangente  $T_x M$  come l'insieme delle classi d'equivalenza  $[(\varphi_\alpha, u)]$ ,  $x \in U_\alpha$ ,  $u \in T_x M$ , tramite la relazione d'equivalenza  $(\varphi_\alpha, u) \sim (\varphi_\beta, v)$  se e solo se

$$v = d(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})_{\varphi_\alpha(x)}.$$

Una **struttura complessa** è una struttura quasi complessa integrabile.

L'integrabilità di una struttura quasi complessa  $J$  può essere espressa in termini del tensore di Nijenhuis  $N_J$  associato a  $J$  e definito come

$$N_J(X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y].$$

La verifica che si tratta di un tensore e cioè che  $N_J(fX, gY) = fgN_J(X, Y)$  per ogni  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f, g \in C^\infty(M)$ , si ottiene facilmente usando le proprietà del Lie bracket  $[X, Y]$ .

**Theorem 2.9.** *Una struttura quasi complessa  $J$  è integrabile se e solo se  $N_J = 0$ .*

**Corollario 2.10.** *Una struttura complessa su una superficie  $S$  è integrabile.*

*Dimostrazione.* Sia  $E_1$  un campo di vettori non nullo in un aperto  $U \subset S$  ( $E_1 \in \mathfrak{X}(U)$ ). Dal momento che  $E_1$  e  $JE_1$  sono linearmente indipendenti esistono  $f_1, f_2, g_1, g_2 \in C^\infty(U)$  tali che  $X = f_1 E_1 + f_2 JE_1$  e  $Y = g_1 E_1 + g_2 JE_1$ . Segue che

$$N_J(X, Y) = f_1 g_1 N_J(E_1, E_1) + f_1 g_2 N_J(E_1, JE_1) + f_2 g_1 N_J(JE_1, E_1) + f_2 g_2 N_J(JE_1, JE_1).$$

Siccome  $N_J(Z, Z) = N_J(Z, JZ) = 0$  per ogni campo di vettori  $Z$  allora  $N_J = 0$  e il corollario segue dal Teorema 2.9.  $\square$

Siano  $(M, J_M)$  e  $(N, J_N)$  due varietà complesse ( $J_M$  e  $J_N$  strutture quasi complesse integrabili). Un'applicazione  $f : M \rightarrow N$  è detta **olomorfa** se  $df \circ J_M = J_N \circ df$ .

Si enuncia senza dimostrazione:

**Proposizione 2.11.** *Sia  $f : M \rightarrow N$  un'applicazione tra due varietà complesse  $(M, J_M)$  e  $(N, J_N)$  e siano  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  e  $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$  due atlanti complessi di  $(M, J_M)$  e  $(N, J_N)$  rispettivamente. Allora  $f$  è olomorfa se e solo per ogni  $\alpha$  e  $\beta$  tali che  $f(U_\alpha) \subset U_\beta$  l'applicazione*

$$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{C}^n$$

è olomorfa.

## 2.3 Varietà di Kähler

Una **varietà di Kähler** è una varietà simplettica  $(M, \omega)$  dotata di una struttura quasi complessa integrabile  $J$  tale che  $J \in \mathcal{J}_\omega$ , cioè esiste una metrica Riemanniana  $g$  tale che

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

La forma  $\omega$  viene chiamata la **struttura** o **forma di Kähler** e la metrica  $g$  **metrica di Kähler**. Dall'Esempio 2.6 e dalla Proposizione 2.10 si ha che ogni superficie orientabile ammette una struttura di Kähler.

**Osservazione 2.12.** Sia  $(M, \omega, J, g)$  una varietà di Kähler. Allora la forma di Kähler  $\omega$  e la struttura complessa  $J$  determinano univocamente la metrica di Kähler  $g$ . Analogamente la forma di Kähler  $\omega$  e la metrica di Kähler  $g$  determinano la struttura complessa  $J$ , così come  $g$  e  $J$  determinano  $\omega$ .

Dalle considerazioni fatte in precedenza si ottiene che  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0, J_0)$  è una varietà di Kähler. Possiamo identificare questa varietà di Kähler con  $\mathbb{C}^n$  in modo tale

che la struttura complessa  $J_0$  corrisponda alla moltiplicazione per  $i$ . In geometria complessa è utile usare le funzioni a valori complessi

$$z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$$

come variabili indipendenti. Si possono quindi introdurre le forme differenziali

$$dz_j = dx_j + idy_j, \quad d\bar{z}_j = dx_j - idy_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Queste in effetti sono 1-forme in  $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$  a valori complessi. Quando si lavora con forme differenziali complesse, il differenziale  $d : \Omega^k(\mathbb{C}^n) \rightarrow \Omega^{k+1}(\mathbb{C}^n)$  può essere scritto come

$$d = \partial + \bar{\partial}, \tag{2.3}$$

dove

$$\partial = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} dz_j \quad \bar{\partial} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j,$$

e  $\frac{\partial}{\partial z_j}$  e  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$  sono definiti come quei campi di vettori (complessi) dati da:

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right).$$

La condizione  $d^2 = 0$  implica

$$\partial^2 = 0 \quad \bar{\partial}^2 = 0 \quad \partial \bar{\partial} + \bar{\partial} \partial = 0. \tag{2.4}$$

La forma simplettica standard  $\omega_0$  si scrive allora come

$$\omega_0 = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \Phi_0 = \frac{i}{2} dz_j \wedge d\bar{z}_j, \tag{2.5}$$

dove

$$\Phi_0 = \sum_{j=1}^n |z_j|^2.$$

Si verifica facilmente che una funzione  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  è olomorfa e se e solo se  $\bar{\partial} f = 0$ .

Si supponga ora di avere una varietà complessa  $(M, J)$ ; ci si chiede quando una data 2-forma chiusa  $\omega$  sia di Kähler cioè quando esiste una metrica Riemanniana  $g$  su  $M$  tale che  $\omega(\cdot, \cdot) = g(J\cdot, \cdot)$ .

Una risposta a tale domanda è espressa dalla seguente proposizione, la quale è riportata senza dimostrazione.

**Proposizione 2.13.** Sia  $(M, J)$  una  $n$ -varietà complessa e  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  un suo atlante complesso. Si supponga che per ogni  $\alpha$  esista una 2-forma chiusa  $\omega_\alpha \in \Omega^2(\varphi_\alpha(U_\alpha))$  tale che

$$\varphi_\alpha^* \omega_\alpha = \varphi_\beta^* \omega_\beta \quad \text{in } U_\alpha \cap U_\beta, \quad (2.6)$$

e inoltre

$$\omega_\alpha = \frac{i}{2} a_{j\bar{k}}^\alpha dz_j \wedge d\bar{z}_k, \quad (2.7)$$

dove  $a_{j\bar{k}}^\alpha$  è una matrice Hermitiana definita positiva<sup>2</sup>. Allora resta definita una forma di Kähler  $\omega$  su  $M$  tale che  $\omega|_{U_\alpha} = \varphi_\alpha^* \omega_\alpha$ .

**Osservazione 2.14.** Nella 2-forma  $\omega_\alpha$  non compaiono i termini  $dz_j \wedge dz_k$  oppure  $d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_k$ . La 2-forma  $\omega$  che localmente si esprime con delle  $\omega_\alpha$  fatte in questo modo prende il nome di forma di tipo  $(1, 1)$ .

**Osservazione 2.15.** Nel caso della forma simplettica standard  $\omega_0$  nell'atlante con una sola carta data dall'identità, si può scrivere

$$\omega_0 = \frac{i}{2} \sum_{j, \bar{k}=1}^n \delta_{j\bar{k}} dz_j \wedge d\bar{z}_k,$$

e quindi la matrice  $a_{j\bar{k}}^\alpha$  è data dalla matrice identità, la quale è chiaramente definita positiva.

### 2.3.1 Lo spazio proiettivo complesso

La definizione dello spazio proiettivo complesso è simile a quella dello spazio proiettivo reale estesa al caso dei numeri complessi. Sia  $n \geq 0$  un numero naturale e sia  $X = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Viene definita una relazione di equivalenza  $\sim$  su  $X$  dichiarando  $Z \sim W$  se e solo se esiste  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tale che  $W = \lambda Z$ . Lo spazio quoziente (con la topologia quoziente) si chiama **lo spazio proiettivo complesso  $n$ -dimensionale** e verrà indicato con  $\mathbb{CP}^n$ . Un punto di  $\mathbb{CP}^n$  verrà denotato con  $[Z]$ . Se si restringe la relazione d'equivalenza alla sfera unitaria in

---

<sup>2</sup>Una matrice Hermititana  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , cioè tale che  $A^* = A$ , dove  $A^* = \overline{A}^T$ , è **definita positiva** se  $v^* A v > 0$ , per ogni  $v \in \mathbb{C}^n$ .



$S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$  si può pensare  $\mathbb{C}P^n$  come l'insieme delle classi d'equivalenza in  $S^{2n+1}$  dove  $Z \sim W$ ,  $Z, W \in S^{2n+1}$  se e solo se esiste  $\lambda \in S^1$  tale che  $W = \lambda Z$ . Esattamente come nel caso di  $\mathbb{R}P^n$  (cfr. Teorema 11.5.1 di [14] in bibliografia) si dimostra che  $\mathbb{C}P^n$  è una varietà topologica compatta e connessa di dimensione  $2n$ . Analogamente al caso di  $\mathbb{R}P^n$ , l'atlante canonico  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha=0, \dots, n}$  di  $\mathbb{C}P^n$  è dato dagli aperti

$$U_\alpha = \{[Z] = [Z_0, \dots, Z_n] \in \mathbb{C}P^n \mid Z_\alpha \neq 0\}, \quad (2.8)$$

insieme alle carte

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}, [Z] \mapsto \left( \frac{Z_0}{Z_\alpha}, \dots, \frac{Z_{\alpha-1}}{Z_\alpha}, \frac{Z_{\alpha+1}}{Z_\alpha}, \dots, \frac{Z_n}{Z_\alpha} \right). \quad (2.9)$$

Dai quali segue immediatamente che i cambi di carta sono dati da

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) : (w_1, \dots, w_n) \mapsto \left( \frac{w_1}{w_\alpha}, \dots, \hat{w}_\alpha, \dots, \frac{1}{w_\alpha}, \dots, \frac{w_n}{w_\alpha} \right),$$

dove  $\hat{w}_\alpha$  significa che il termine  $w_\alpha$  viene cancellato e  $\frac{1}{w_\alpha}$  si trova nella posizione  $\beta$ -esima. Conseguentemente i cambi di carta sono olomorfi e l'atlante canonico è un atlante olomorfo su  $\mathbb{C}P^n$ .

Solitamente i  $Z_j$ ,  $j = 0, \dots, n$ , che determinano il punto di  $\mathbb{C}P^n$  (a meno di una costante complessa moltiplicativa) dato da  $[Z_0, \dots, Z_n]$  prendono il nome di **coordinate omogenee** mentre  $\left( \frac{Z_0}{Z_\alpha}, \dots, \frac{Z_{\alpha-1}}{Z_\alpha}, \frac{Z_{\alpha+1}}{Z_\alpha}, \dots, \frac{Z_n}{Z_\alpha} \right)$  sono chiamate le **coordinate affini** nella **carta affine**  $U_\alpha$ .

Si vuole ora definire una struttura di Kähler su  $\mathbb{C}P^n$ . Per fare ciò verrà usata la Proposizione 2.13. L'atlante canonico dato da (2.8) e (2.9) è un'atlante complesso. Per ogni  $\alpha$  si consideri la forma

$$\omega_\alpha \in \Omega^2(\varphi_\alpha(U_\alpha)) = \Omega^2(\mathbb{C}^n)$$

definita come

$$\omega_\alpha = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \log(1 + \sum_{\gamma \neq \alpha} |z_\gamma|^2) = \frac{i}{2} \sum_{\sigma, \gamma \neq \alpha} \frac{(1 + \sum_{\gamma \neq \alpha} |z_\gamma|^2) \delta_{\sigma\bar{\gamma}} - \bar{z}_\delta z_\gamma}{(1 + \sum_{\gamma \neq \alpha} |z_\gamma|^2)^2} dz_\sigma \wedge d\bar{z}_\gamma$$

Per esempio nel caso  $\alpha = 0$  (qui  $\omega_0$  non va confusa con la forma di Kähler piatta  $\mathbb{C}^n$ !)

$$\omega_0 = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \log(1 + \sum_{j=1}^n |z_j|^2) = \frac{i}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{(1 + \sum_j |z_j|^2) \delta_{j\bar{k}} - \bar{z}_j z_k}{(1 + \sum_j |z_j|^2)^2} dz_j \wedge d\bar{z}_k. \quad (2.10)$$

Quindi in questo caso la matrice  $a_{j\bar{k}}^0$  ha l'espressione

$$a_{j\bar{k}}^0 = \frac{(1 + \sum_j |z_j|^2) \delta_{j\bar{k}} - \bar{z}_j z_k}{(1 + \sum_j |z_j|^2)^2}.$$

Non è difficile verificare che  $\varphi^* \omega_\alpha = \varphi^* \omega_\beta$  e che la matrice  $a_{j\bar{k}}^0$ , e analogamente le matrici  $\frac{(1 + \sum_{\gamma \neq \alpha} |z_\gamma|^2) \delta_{\sigma\bar{\gamma}} - \bar{z}_\sigma z_\gamma}{(1 + \sum_{\gamma \neq \alpha} |z_\gamma|^2)^2}$ , sono definite positive. Inoltre  $\omega_\alpha$  è chiusa come segue da (2.3) e (2.4).

Segue allora dalla Proposizione 2.13 che esiste una 2-forma di Kähler  $\omega_{FS} \in \Omega^2(\mathbb{C}P^n)$  che ristretta a  $U_\alpha$  è uguale a  $\omega_\alpha$ . Questa forma, come suggerito dalla notazione, è chiamata la **forma di Fubini–Study**. La metrica di Kähler corrispondente si indica con  $g_{FS}$  e si chiama la **metrica di Fubini–Study**.

## Il caso unidimensionale

Per  $n = 0$ ,  $\mathbb{C}P^0$  si riduce ad un punto. Mentre, per  $n = 1$  lo spazio complesso unidimensionale è diffeomorfo alla sfera come espresso dalla seguente:

**Proposizione 2.16.** *Lo spazio proiettivo complesso  $\mathbb{C}P^1$  è diffeomorfo alla sfera  $S^2$ .*

*Dimostrazione.* Per dimostrare la proposizione diamo una descrizione esplicita delle carte  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$  dell'atlante canonico  $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j=0,1}$  di  $\mathbb{C}P^1$ . Da (2.9) otteniamo:

$$\begin{aligned} \varphi_0 : U_0 &\rightarrow \mathbb{C}, [z_0, z_1] \mapsto \frac{z_1}{z_0} = z = x + iy \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2, \\ \varphi_1 : U_1 &\rightarrow \mathbb{C}, [z_0, z_1] \mapsto \frac{z_0}{z_1} = w = u + iv \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Mentre le loro inverse sono:

$$\varphi_0^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow U_0, z \mapsto [1, z],$$

$$\varphi_1^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow U_1, \quad w \mapsto [w, 1].$$

Siano  $N = (0, 0, 1)$  e  $S = (0, 0, -1)$  il polo nord e il polo sud della sfera

$$S^2 = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + t^2 = 1\} = \{(z, t) \mid |z|^2 + t^2 = 1\}, \quad z = x + iy.$$

Si consideri l'atlante su  $S^2$  costituito dalle due carte  $(U_N = S^2 \setminus \{N\}, \varphi_N)$  e  $(U_S = S^2 \setminus \{S\}, \bar{\varphi}_S)$  di  $S^2$  date da:

$$\varphi_N : U_N \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}, \quad (x, y, t) \mapsto \left( \frac{x}{1-t}, \frac{y}{1-t} \right) = \frac{z}{1-t}$$

$$\bar{\varphi}_S : U_S \rightarrow \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}, \quad (x, y, t) \mapsto \left( \frac{x}{1+t}, \frac{-y}{1+t} \right) = \frac{\bar{z}}{1+t},$$

dove  $z = x + iy$ .  $\varphi_N$  è esattamente la proiezione stereografica dal polo nord mentre  $\bar{\varphi}_S$  è la coniugata della proiezione stereografica  $\varphi_S$  dal polo sud. Si osservi che per

$$(z, t) \in U_N \cap U_S = \{(z, t) \mid |z|^2 + t^2 = 1, \quad t \neq \pm 1\}$$

si ha:

$$\frac{z}{1-t} = \frac{1+t}{\bar{z}}.$$

Segue che l'applicazione  $F : S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^1$

$$F(z, t) = \begin{cases} \varphi_0^{-1}(\varphi_N(z, t)) = [1, \frac{z}{1-t}] & \text{se } (z, t) \in U_N \\ \varphi_1^{-1}(\bar{\varphi}_S(z, t)) = [\frac{\bar{z}}{1+t}, 1] & \text{se } (z, t) \in U_S, \end{cases}$$

definisce un diffeomorfismo da  $S^2$  a  $\mathbb{C}P^1$ . □

In questo caso la forma di Fubini–Study in  $U_0$  è data da

$$\omega_{FS} = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \log(1 + |z|^2) = \frac{i}{2} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2}$$

che (in notazione reale) coincide con la (2.1).

### 2.3.2 Potenziali di Kähler e forme spaziali complesse

Sia  $(M, \omega)$  una varietà di Kähler. Se esiste una funzione  $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\omega = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \log \Phi$  allora  $\Phi$  prende il nome di **potenziale di Kähler** della forma

$\omega$ . Se la varietà  $M$  è compatta non può esistere un tale potenziale altrimenti la forma  $\omega$  sarebbe esatta,  $\omega = d\alpha$  con  $\alpha \in \Omega^1(M)$ , e quindi con un ragionamento simile a quello della Proposizione 2.5 si otterrebbe una contraddizione. D'altra parte si riesce a dimostrare che almeno localmente esiste sempre un **potenziale di Kähler locale**. Infatti, dato  $p \in M$ , esiste un intorno aperto  $U$  di  $p$  e una funzione  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  (chiamato appunto potenziale di Kähler locale) tale che  $\omega|_U = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\log\Phi$ . Un potenziale di Kähler locale non è unico ma è univocamente determinato a meno della somma della parte reale di una funzione olomorfa su  $U$ . Infatti se  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}$  è una funzione olomorfa e  $\frac{1}{2}(\varphi + \bar{\varphi})$  la sua parte reale allora

$$\partial\bar{\partial}\left[\frac{1}{2}(\varphi + \bar{\varphi})\right] = \frac{1}{2}\partial\bar{\partial}(\varphi + \bar{\varphi}) = \frac{1}{2}\partial\bar{\partial}\varphi - \frac{1}{2}\bar{\partial}\partial\bar{\varphi} = 0$$

in quanto  $\varphi$  è olomorfa e quindi  $\bar{\partial}\varphi = 0$  e  $\bar{\varphi}$  è antiolomorfa e quindi  $\partial\bar{\varphi} = 0$ . Nel caso della forma di Kähler  $\omega_0$  su  $\mathbb{C}^n$ , un potenziale di Kähler globale è dato da  $\Phi_0 = |z|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2$  come si evince dalla (2.5).

Segue invece dalla (2.10) che un potenziale di Kähler locale della forma di Fubini–Study  $\omega_{FS}$  su  $\mathbb{C}P^n$  nell'aperto  $U_0 = \{Z_0 \neq 0\}$  è dato da

$$\Phi_{FS} = \log(1 + |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2), \quad z_j = \frac{Z_j}{Z_0}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Un altro esempio è dato dalla forma di Kähler  $\omega_{hyp}$  sulla palla  $B^{2n}(1)$  unitaria data da

$$\omega_{hyp} = -\frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\log(1 - |z|^2), \quad |z|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2.$$

Infatti un semplice calcolo mostra che

$$\omega_{hyp} = \frac{i}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{(1 - |z|^2)\delta_{j\bar{k}} + \bar{z}_j z_k}{(1 - |z|^2)^2} dz_j \wedge d\bar{z}_k \quad (2.11)$$

dove

$$b_{j\bar{k}} = \frac{(1 - |z|^2)\delta_{j\bar{k}} + \bar{z}_j z_k}{(1 - |z|^2)^2}.$$

Inoltre, non è difficile vedere che la matrice  $b_{j\bar{k}}$  è definita positiva. Segue allora dalla Proposizione 2.13 che  $\omega_{hyp}$  è effettivamente una forma di Kähler su  $B^{2n}(1)$  con potenziale di Kähler globale dato da

$$\Phi_{hyp} = -\log(1 - |z|^2).$$

La varietà di Kähler  $(B^{2n}(1), \omega_{hyp})$  prende il nome di **spazio iperbolico complesso** di dimensione complessa  $n$ . Si osservi che nel caso  $n = 1$  lo spazio iperbolico è dato dal disco unitario  $B^2(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 < 1\}$  con la forma di Kähler

$$\omega_{hyp} = \frac{i}{2} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}.$$

In geometria Kähleriana si può definire il concetto di **curvatura sezionale olomorfa**. Si può dimostrare che, a meno di omotetie, le varietà di Kähler complete, semplicemente connesse di dimensione complessa  $n$  a curvatura olomorfa costante, sono lo spazio Euclideo complesso  $(\mathbb{C}^n, \omega_0)$  (con curvatura olomorfa zero), lo spazio proiettivo complesso  $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$  (con curvatura olomorfa positiva) e lo spazio iperbolico complesso  $(B^{2n}(1), \omega_{hyp})$  (con curvatura olomorfa negativa). Questi tre spazi vengono chiamati **forme spaziali complessi** e giocano il ruolo analogo dello spazio Euclideo reale, della sfera e dello spazio iperbolico reale in geometria Riemanniana, dove si richiede che la curvatura sezionale sia costante.

### 2.3.3 Sottovarietà di Kähler

In generale, data una varietà simplettica  $(S, \Omega)$  non è detto che una sua sottovarietà  $M \subset S$  con la forma simplettica indotta  $\omega = \Omega|_M$  sia ancora una varietà simplettica. Infatti può capitare che  $\omega$  si degeneri.

Nel caso che la varietà  $(S, \Omega)$  sia di Kähler la situazione è più interessante. Infatti vale il seguente risultato:

**Proposizione 2.17.** *Sia  $(S, \Omega)$  una varietà di Kähler,  $\varphi : M \rightarrow S$  un embedding olomorfo e sia  $\omega = \varphi^*\Omega$  il pull-back di  $\Omega$  tramite  $\varphi$ . Allora  $(M, \omega)$  è una varietà di Kähler (in particolare simplettica).*

*Dimostrazione.* Si ricorda (si veda la Proposizione 2.11) che  $\varphi$  è olomorfo se e solo se  $d\varphi \circ J_M = J_S \circ d\varphi$ , dove  $J_S$  (risp.  $J_M$ ) denota la struttura complessa su  $S$  (risp.  $M$ ). Sia  $g = \varphi^*G$ , dove  $G$  è la metrica di Kähler associata a  $\Omega$ . Si vuole

dimostrare che  $g$  è la metrica <sup>3</sup> di Kähler associata a  $\omega$  e cioè:

$$\omega(X, Y) = g(J_M X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Questo si dimostra come segue.

$$\begin{aligned} \omega(X, Y) &= (\varphi^* \Omega)(X, Y) = \Omega(d\varphi X, d\varphi Y) = G(J_S d\varphi X, d\varphi Y) \\ &= G(d\varphi J_M X, d\varphi Y) = (\varphi^* G)(J_M X, Y) = g(J_M X, Y). \end{aligned}$$

□

Una **varietà algebrica liscia** è una varietà compatta e complessa  $M$  tale che esista un embedding olomorfo  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{C}P^N$ , per qualche  $N$ .

Dalla proposizione precedente segue quindi:

**Corollario 2.18.** *Una varietà algebrica liscia  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{C}P^N$  ammette una struttura di Kähler  $\omega = \varphi^* \omega_{FS}$ , dove  $\omega_{FS}$  è la forma di Fubini–Study su  $\mathbb{C}P^N$ .*

---

<sup>3</sup>Il fatto che  $g$  sia una metrica segue dal fatto che  $\varphi$  è un'immersione. Infatti  $g$  è chiaramente simmetrica essendolo  $G$ ,  $g(X, X) = G(d\varphi X, d\varphi X) \geq 0$  e infine se  $g(X, X) = 0$  allora  $d\varphi X = 0$  e quindi  $X = 0$  per l'iniettività di  $d\varphi$ .

# Capitolo 3

## Simplettomorfismi

### 3.1 Il Teorema di Darboux

Sia  $(M, \omega)$  una varietà simplettica. Con  $\text{Symp}(M, \omega)$  si denota il **gruppo dei simplettomorfi** (rispetto alla composizione), ossia l'insieme costituito dai diffeomorfismi  $\varphi : M \rightarrow M$  tali che  $\varphi^*\omega = \omega$ . Più in generale si dirà che due varietà simplettiche  $(M_1, \omega_1)$  e  $(M_2, \omega_2)$  sono **simplettomorfe** se esiste un diffeomorfismo  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  tale che  $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$ . Un tale diffeomorfismo  $\varphi$  è detto **simplettomorfismo** tra  $(M_1, \omega_1)$  e  $(M_2, \omega_2)$ . Dal punto di vista geometrico il fatto che due varietà simplettiche siano simplettomorfe si può esprimere dicendo che per ogni superficie  $S \subset M_1$  si ha

$$\omega_1(S) = \int_S \omega_1 = \omega_2(\varphi(S)) = \int_{\varphi(S)} \omega_2.$$

Ovviamente si può definire una relazione d'equivalenza sull'insieme di tutte le varietà simplettiche affermando che due varietà simplettiche sono equivalenti se esiste un simplettomorfismo tra le due varietà. Dal punto di vista della geometria simplettica due varietà simplettomorfe sono quindi lo “stesso oggetto”.

Più in generale un'applicazione differenziabile  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  tra due varietà simplettiche  $(M_1, \omega_1)$  e  $(M_2, \omega_2)$  è detta **simplettica** se  $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$ .

Nella Proposizione 1.2 si è dimostrato che esiste una base simplettica e come conseguenza nel Corollario 1.6 si è dimostrato che due spazi vettoriali simplet-

tici della stessa dimensione sono isomorfi tramite un isomorfismo che rispetta le rispettive forme simplettiche. In particolare, tutti gli spazi vettoriali reali simplettici  $(V, \omega)$  di dimensione  $2n$  sono isomorfi a  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ . Il seguente teorema mostra che questi risultati si estendono alle varietà simplettiche.

**Theorem 3.1.** *(Teorema di Darboux) Sia  $(M, \omega)$  una varietà simplettica di dimensione  $2n$ . Allora per ogni  $p \in M$  esiste un intorno aperto  $U \subset M$  di  $p$  e un diffeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{2n}$  tale che  $\varphi(p) = 0$  e  $\varphi^*\omega_0 = \omega|_U$ .*

Il teorema può essere espresso in modo equivalente dicendo che per ogni punto  $p \in M$  esistono delle coordinate simplettiche intorno a tale punto. Si può anche affermare che una varietà simplettica  $(M, \omega)$  di dimensione  $2n$  può essere definita come una varietà differenziabile dotata di un atlante  $\{(U_j, \varphi_j)\}$ , dove i cambi di carta  $\varphi_k \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_j \cap U_k) \rightarrow \varphi_k(U_j \cap U_k)$  appartengono al gruppo dei simplettomorfismi  $\text{Symp}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  di  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ , cioè soddisfano la condizione  $(\varphi_k \circ \varphi_j^{-1})^*\omega_0 = \omega_0$ .

**Osservazione 3.2.** Il Teorema di Darboux dice che l'unico invariante simplettico locale di una varietà simplettica è la sua dimensione, cioè due varietà simplettiche della stessa dimensione sono localmente simplettomorfe. Osserviamo che lo stesso fenomeno non si verifica per le varietà Riemanniane in quanto, in questo caso, la curvatura è un invariante locale. Per esempio la sfera  $S^2$  con la metrica a curvatura costante positiva e il toro  $\mathbb{T}^2$  con la metrica piatta non possono essere localmente isometrici.

**Osservazione 3.3.** Nell'enunciato del Teorema di Darboux si può anche supporre, restringendo opportunamente  $U$ , che  $\varphi(U) = B^{2n}(r)$ . Si può quindi affermare che data una varietà simplettica  $(M, \omega)$  esiste sempre un numero reale positivo  $r > 0$  e un embedding simplettico  $\psi : (B^{2n}(r), \omega_0) \rightarrow (M, \omega)$  dalla palla aperto di raggio  $r$  alla varietà.

*Dimostrazione del Teorema 3.1.* Scegliendo delle coordinate arbitrarie su  $M$  si supponga che  $\omega$  sia una forma simplettica in  $\mathbb{R}^{2n}$  che dipende dal punto  $z \in \mathbb{R}^{2n}$



e che  $p$  corrisponda a  $z = 0$ . Inoltre, con un cambio di coordinate lineare (per la Proposizione 1.2), si assume che la forma  $\omega$  in  $z = 0$  coincida con la forma canonica di  $\mathbb{R}^{2n}$ :

$$\omega(0) = \omega_0 = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j.$$

Si vuole trovare un diffeomorfismo locale  $\psi$  in un intorno dell'origine che lasci l'origine fissa e tale che  $\psi^*\omega = \omega$ . Quest'equazione può essere risolta con una tecnica di "deformazione". Si consideri la famiglia  $\omega_t$  di 2-forme definita come:

$$\omega_t = \omega_0 + t(\omega - \omega_0), \quad t \in [0, 1].$$

Ovviamente  $\omega_t$  per  $t = 0$  è  $\omega_0$  mentre  $\omega_1 = \omega$ . Si cerca una famiglia di diffeomorfismi  $\psi^t$  tali che  $\psi^0 = id$  e

$$(\psi^t)^*\omega_t = \omega_0, \quad t \in [0, 1]. \quad (3.1)$$

La soluzione al problema si otterrà per  $t = 1$ ,  $\psi := (\psi^1)^*\omega = \omega_0$ . Per trovare  $\psi^t$  si costruisca un campo di vettori  $X_t$  il cui flusso sia  $\psi^t$ . Derivando rispetto a  $t$  il campo di vettori  $X_t$ , dovrebbe essere soddisfatta l'equazione

$$\frac{d}{dt}(\psi^t)^*\omega_t = (\varphi^t)^*\{L_{X_t}\omega_t + \frac{d}{dt}\omega_t\},$$

qui  $L_Y$  denota la derivata di Lie rispetto al campo di vettori  $Y$ . Per l'identità di Cartan:

$$L_X = i_X \circ d + d \circ i_X$$

e siccome  $d\omega_t = 0$  si ottiene

$$(\psi^t)^*\{d(i_{X_t}\omega_t) + \omega_t - \omega_0\} = 0.$$

Quindi  $X_t$  deve soddisfare l'equazione lineare

$$d(i_{X_t}\omega_t) + \omega_t - \omega_0 = 0. \quad (3.2)$$

Siccome  $\omega_t(0) = \omega_0$ , le 2-forme  $\omega_t$  sono non degeneri per  $t \in [0, 1]$  in un intorno aperto dell'origine e quindi esiste un unico campo di vettori  $X_t$  determinato dall'equazione

$$i_{X_t}\omega_t = \omega_t(X_t, \cdot) = -\lambda$$

per  $t \in [0, 1]$ , che risolve quindi l'equazione (3.2). Dal momento che  $\lambda(0) = 0$  e quindi  $X_t(0) = 0$ , allora esiste un intorno aperto dell'origine nel quale il flusso  $\psi^t$  di  $X_t$  esiste per ogni  $t \in [0, 1]$ . Questo soddisfa  $\psi^0 = id$  e  $\psi^t(0) = 0$ . Seguendo l'argomento al contrario il flusso  $\psi^t$  è un diffeomorfismo che soddisfa

$$\frac{d}{dt}(\psi^t)^*\omega_t = 0, \quad t \in [0, 1].$$

Quindi  $(\psi^t)^*\omega_t = (\psi^0)^*\omega_0 = \omega_0$  per  $t \in [0, 1]$  e la dimostrazione è conclusa.  $\square$

## 3.2 Il problema degli embedding simplettici

Siano  $(M, \omega)$  e  $(S, \Omega)$  due varietà simplettiche di dimensione rispettivamente  $2n$  e  $2N$ ,  $n \leq N$ . La seguente domanda è molto naturale e come si vedrà sta alla base della nascita della topologia simplettica, cioè dello studio degli invarianti simplettici (globali).

**Domanda 1.** *Sotto quali condizioni esiste un embedding simplettico  $\Psi : (M, \omega) \rightarrow (S, \Omega)$ , ossia un embedding (differenziabile)  $\Psi : M \rightarrow S$  tale che  $\Psi^*(\Omega) = \omega$ ?*

I seguenti teoremi A, B, C e D forniscono una risposta topologica a questa domanda nel caso in cui  $\Omega$  sia la forma di Kähler di una forma spaziale complessa di dimensione complessa  $N$ , cioè  $(S, \Omega)$  è lo spazio Euclideo complesso  $(\mathbb{C}^N, \omega_0)$ , lo spazio iperbolico  $(\mathbb{C}H^N, \omega_{hyp})$  o lo spazio proiettivo complesso  $(\mathbb{C}P^N, \omega_{FS})$  (si veda il sottoparagrafo 2.3.2). Questi risultati seguono dal *h-principle* di Gromov [7] del quale non si tratterà in questa tesi (si veda anche il Capitolo 12 in [4] per una descrizione del lavoro di Gromov).

**Teorema A** (Gromov [7] e [6]) *Sia  $(M, \omega)$  una varietà simplettica contraibile. Allora esiste un intero positivo  $N$  e un embedding simplettico  $\Psi : (M, \omega) \rightarrow (\mathbb{C}^N, \omega_0)$ .*

Questo risultato è stato poi generalizzato da Popov come segue:

**Teorema B** (Popov [22]) *Sia  $(M, \omega)$  una varietà simplettica. Si supponga che  $\omega$  sia esatta, cioè  $\omega = d\alpha$ , per una 1-forma  $\alpha$ . Allora esiste un intero non negativo  $N$  e un embedding simplettico  $\Psi : (M, \omega) \rightarrow (\mathbb{C}^N, \omega_0)$ .*

Si osservi che lo spazio iperbolico complesso  $N$ -dimensionale, cioè la palla unitaria  $B^{2N}(0) = \{z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N \mid \sum_{j=1}^N |z_j|^2 < 1\}$  di  $\mathbb{C}^N$  dotata della forma iperbolica  $\omega_{hyp} = -\frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \log(1 - \sum_{j=1}^N |z_j|^2)$  è globalmente simplettomorfo a  $(\mathbb{C}^N, \omega_0)$  (cfr. (3.22) nel Lemma 3.6 sotto) quindi il Teorema B implica immediatamente:

**Teorema C** *Sia  $(M, \omega)$  una varietà simplettica e si supponga  $\omega$  esatta. Allora esiste un intero non negativo  $N$  e un embedding simplettico  $\Psi : (M, \omega) \rightarrow (\mathbb{C}H^N, \omega_{hyp})$ .*

Il teorema seguente, che è stato generalizzato da Popov [22] al caso non compatto, riguarda il caso dello spazio proiettivo complesso  $\mathbb{C}P^N$ , con la forma di Fubini–Study  $\omega_{FS}$ . Si ricorda (si veda la (2.10)) che se  $Z_0, \dots, Z_N$  denotano le coordinate omogenee su  $\mathbb{C}P^N$ , allora, nella carta affine  $Z_0 \neq 0$  con coordinate  $z_j = \frac{Z_j}{Z_0}, j = 1, \dots, N$ , la forma di Fubini–Study si scrive come:

$$\omega_{FS} = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \log(1 + \sum_{j=1}^N |z_j|^2).$$

**Teorema D** (Gromov [6], Tischler [24]) *Sia  $(M, \omega)$  una varietà simplettica compatta tale che  $\omega$  sia intera <sup>1</sup>. Allora esiste un intero non negativo  $N$  e un embedding simplettico  $\Psi : (M, \omega) \rightarrow (\mathbb{C}P^N, \omega_{FS})$ .*

A questo punto un problema naturale è quello di trovare la dimensione più piccola dello forma spaziale complessa dove una varietà simplettica  $(M, \omega)$  possa essere embedded in modo simplettico. In particolare è interessante studiare il caso equidimensionale:

**Domanda 2.** *Sia  $(M, \omega)$  una varietà simplettica di dimensione  $2n$ . Sotto quali condizioni esiste un embedding  $\Psi$  di  $(M, \omega)$  in  $(\mathbb{C}^n, \omega_0)$  oppure in  $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ ?*

---

<sup>1</sup>La condizione che  $\omega$  sia intera è una condizione topologica che qui non verrà trattata.

Si osservi che dal punto di vista locale non esistono ostruzioni all'esistenza di una tale  $\Psi$ . Infatti, per il Teorema di Darboux, dato  $p \in M$  esiste un intorno aperto  $U$  di  $p$  e un embedding  $\Psi : U \rightarrow \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$  tale che  $\Psi^*(\omega_0) = \omega$ . Nel caso si voglia ottenere un embedding locale in  $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$  si può assumere (restringendo  $U$  se necessario) che  $\Psi(U) \subset B^{2n}(1)$  e quindi  $f \circ \Psi : U \rightarrow (\mathbb{C}^n, \omega_{FS}) \subset (\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ , con  $f$  data dal Lemma 3.6 seguente, sia un embedding che soddisfa  $(f \circ \Psi)^*(\omega_{FS}) = \Psi^*(\omega_0) = \omega$ . Va inteso anche che il Teorema di Darboux può essere visto come un caso speciale del seguente:

**Teorema E** (Gromov [8]) *Una varietà simplettica contraibile di dimensione  $2n$  ammette un'immersione simplettica in  $(\mathbb{C}^n, \omega_0)$ .*

Si fa notare che il teorema precedente non è di nessuno aiuto per rispondere alla Domanda 2. Infatti esistono delle strutture simplettiche in  $\mathbb{R}^{2n}$  (cfr. [5]), chiamate strutture esotiche  $\omega$  in  $\mathbb{R}^{2n}$ , per le quali non esiste un embedding in  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ . (Il lettore interessato troverà in [2] una descrizione esplicita di una varietà simplettica di dimensione 4 diffeomorfa a  $\mathbb{R}^4$  che non ammette un embedding simplettico in  $(\mathbb{R}^4, \omega_0)$ ).

Nel caso in cui la varietà simplettica in questione sia una varietà di Kähler  $(M, \omega)$  con metrica di Kähler  $g$ , si può provare a imporre condizioni di tipo Riemanniano o di tipo olomorfo per rispondere alla Domanda 2.

In questa direzione è dato il seguente:

**Teorema F** (McDuff [19]) *Sia  $(M, g)$  una varietà di Kähler semplicemente connessa e completa di dimensione complessa  $n$ . Si supponga che la sua curvatura sezionale sia minore o uguale a zero. Allora esiste un diffeomorfismo  $\Psi : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  tale che  $\Psi^*(\omega_0) = \omega$ .*

Si osservi anche che il Teorema F non da alcuna idea di come costruire il simplettomorfismo esplicito. Nei prossimi paragrafi di questo capitolo verranno costruiti embedding e simplettomorfismi espliciti.

### 3.3 Domini complessi invarianti per rotazioni

Sia  $M \subset \mathbb{C}^n$  un dominio complesso (aperto e connesso dotato di una forma di Kähler  $\omega$  che ammetta un potenziale di Kähler invariante per rotazioni, cioè una funzione liscia  $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\omega = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\Phi$ , che dipenda solo da  $|z_1|^2, \dots, |z_n|^2$ , dove  $z_1, \dots, z_n$  denotano le coordinate standard di  $\mathbb{C}^n$ ). Esiste quindi una funzione liscia  $\tilde{\Phi} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , definita sull'insieme aperto  $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^n$  dato da

$$\tilde{M} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_j = |z_j|^2, z = (z_1, \dots, z_n) \in M\} \quad (3.3)$$

tale che

$$\Phi(z_1, \dots, z_n) = \tilde{\Phi}(x_1, \dots, x_n), \quad x_j = |z_j|^2, \quad j = 1, \dots, n.$$

Si ponga  $\omega := \omega_\Phi$  e si chiami  $\omega_\Phi$  una forma di Kähler **invariante per rotazioni** con funzione **associata**  $\tilde{\Phi}$ . Vale la pena sottolineare che ci sono molti esempi interessanti di forme di Kähler in domini complessi che sono invarianti per rotazioni (o addirittura radiali, cioè dipendenti solamente da  $r = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2$ ), a tale proposito si veda il paragrafo 3.4.

**Theorem 3.4.** *(A. Loi e F. Zuddas [17]) Sia  $M \subseteq \mathbb{C}^n$  un dominio complesso dove la condizione*

$$M \cap \{z_j = 0\} \neq \emptyset, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

*è verificata<sup>2</sup> e sia  $\omega_\Phi = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\Phi$  una forma di Kähler invariante per rotazioni su  $M$  con funzione associata  $\tilde{\Phi} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si ha:*

(i) se

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k} \geq 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.5)$$

*allora esiste un'immersione simplettica*

$$\Psi_0 : (M, \omega_\Phi) \rightarrow (\mathbb{C}^n, \omega_0)$$

*(rispettivamente  $\Psi_{hyp} : (M, \omega_\Phi) \rightarrow (\mathbb{C}H^n, \omega_{hyp})$ );*

---

<sup>2</sup>Chiaramente (3.4) è soddisfatta se  $0 \in M$ , ma esistono anche dei casi interessanti, si vedano gli Esempi 3.8 e 3.9, dove la condizione è verificata.

(ii) se

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k} \geq 0, \quad k = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_j} x_j < 1, \quad (3.6)$$

allora esiste un'immersione simplettica

$$\Psi_{FS} : (M, \omega_{\Phi}) \rightarrow (\mathbb{C}^n, \omega_{FS}),$$

dove si pensa  $\mathbb{C}^n \xrightarrow{i} \mathbb{C}P^n$  come carta affine  $Z_0 \neq 0$  in  $\mathbb{C}P^n$  dotata della restrizione della forma di Fubini–Study  $\omega_{FS}$ .

Si assuma inoltre che  $0 \in M$ . Se (3.5) (resp.(3.6)) è verificata allora  $\Psi_0$  (resp.  $\Psi_{FS}$ ) è un simplettomorfismo globale (e quindi  $i \circ \Psi_{FS} : M \rightarrow \mathbb{C}P^n$  è un embedding simplettico) se e solo se

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k} > 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (3.7)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \partial M} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_j} x_j = +\infty \quad (\text{resp.} \quad \lim_{x \rightarrow \partial M} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_j} x_j = 1). \quad {}^3 \quad (3.8)$$

Si osservi che le applicazioni  $\Psi_0$ ,  $\Psi_{hyp}$  e  $\Psi_{FS}$  possono essere descritte esplicitamente (si veda (3.25), (3.26) e (3.27)).

Per dimostrare il Teorema 3.4 si ha bisogno del seguente lemma che descrive la struttura di una particolare classe di immersioni simplettiche tra domini complessi  $M \subset \mathbb{C}^n$  e  $S \subset \mathbb{C}^n$  dotati di metriche di Kähler invarianti per rotazioni  $\omega_{\Phi}$  e  $\omega_{\Xi}$  rispettivamente. La classe di applicazioni da  $M$  a  $S$  alle si è interessati sono della forma:

$$\Psi : M \rightarrow S, z \mapsto (\Psi_1(z) = \tilde{\psi}_1(x)z_1, \dots, \Psi_n(z) = \tilde{\psi}_n(x)z_n), \quad (3.9)$$

---

<sup>3</sup>Data un'applicazione continua invariante per rotazioni map  $F : M \rightarrow \mathbb{R}$  si scrive

$$\lim_{x \rightarrow \partial M} \tilde{F}(x) = l \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

se, per  $\|x\| \rightarrow +\infty$  o  $z \rightarrow z_0 \in \partial M$ , si ha  $\|\tilde{F}(x)\| \rightarrow l$ , dove  $\partial M$  denota la frontiera di  $M \subset \mathbb{C}^n$  e  $\tilde{F} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , dove  $\tilde{M}$  è data da (3.3), è l'applicazione continua

$$F(z_1, \dots, z_n) = \tilde{F}(x_1, \dots, x_n), \quad x_j = |z_j|^2.$$

$z = (z_1, \dots, z_n)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_j = |z_j|^2$  per funzioni a valori reali  $\tilde{\psi}_j : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , dove  $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^n$  è dato da (3.3). Un'applicazione liscia come (3.9) verrà chiamata **applicazione speciale**.

**Lemma 3.5.** *Siano  $M \subseteq \mathbb{C}^n$  e  $S \subseteq \mathbb{C}^n$  domini complessi come sopra. Un'applicazione speciale  $\Psi : M \rightarrow S$ ,  $z \mapsto (\Psi_1(z), \dots, \Psi_n(z))$ , è simplettica, cioè  $\Psi^*(\omega_\Xi) = \omega_\Phi$ , se e solo se esiste una costante  $c_k \in \mathbb{R}$  tale che le seguenti uguaglianze siano soddisfatte:*

$$\tilde{\psi}_k^2 \frac{\partial \tilde{\Xi}}{\partial x_k}(\Psi) = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k} + \frac{c_k}{x_k}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.10)$$

dove  $\tilde{\Phi}$  (risp.  $\tilde{\Xi}$ ) è la funzione associata a  $\omega_\Phi$  (risp.  $\omega_\Xi$ ), e

$$\frac{\partial \tilde{\Xi}}{\partial x_k}(\Psi) = \frac{\partial \tilde{\Xi}}{\partial x_k}(\tilde{\psi}_1^2 x_1, \dots, \tilde{\psi}_n^2 x_n), \quad k = 1, \dots, n.$$

*Dimostrazione.* Usando il fatto che

$$\omega_\Xi = \frac{i}{2} \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Xi}}{\partial x_i \partial x_j} \bar{z}_j z_i + \frac{\partial \tilde{\Xi}}{\partial x_i} \delta_{ij} \right)_{x_1=|z_1|^2, \dots, x_n=|z_n|^2} dz_j \wedge d\bar{z}_i$$

si ottiene

$$\Psi^*(\omega_\Xi) = \frac{i}{2} \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Xi}}{\partial x_i \partial x_j}(\Psi) \Psi_i \bar{\Psi}_j + \frac{\partial \tilde{\Xi}}{\partial x_j}(\Psi) \delta_{ij} \right)_{x_1=|z_1|^2, \dots, x_n=|z_n|^2} d\Psi_j \wedge d\bar{\Psi}_i,$$

dove

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Xi}}{\partial x_i \partial x_j}(\Psi) = \frac{\partial^2 \tilde{\Xi}}{\partial x_i \partial x_j}(\tilde{\psi}_1^2 x_1, \dots, \tilde{\psi}_n^2 x_n).$$

Se si scompone  $\Psi^*(\omega_\Xi)$  in forme di tipo (2, 0), (1, 1) e (0, 2)

$$\Psi^*(\omega_\Xi) = \Psi^*(\omega_\Xi)_{(2,0)} + \Psi^*(\omega_\Xi)_{(1,1)} + \Psi^*(\omega_\Xi)_{(0,2)}$$

si ottiene:

$$\Psi^*(\omega_\Xi)_{(2,0)} = \frac{i}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^n \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Xi}}{\partial x_i \partial x_j}(\Psi) \Psi_i \bar{\Psi}_j + \frac{\partial \tilde{\Xi}}{\partial x_j}(\Psi) \delta_{ij} \right) \frac{\partial \Psi_j}{\partial z_k} \frac{\partial \bar{\Psi}_i}{\partial z_l} dz_k \wedge dz_l \quad (3.11)$$

$$\Psi^*(\omega_\Xi)_{(1,1)} = \frac{i}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^n \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Xi}}{\partial x_i \partial x_j}(\Psi) \Psi_i \bar{\Psi}_j + \frac{\partial \tilde{\Xi}}{\partial x_j}(\Psi) \delta_{ij} \right) \left( \frac{\partial \Psi_j}{\partial z_k} \frac{\partial \bar{\Psi}_i}{\partial \bar{z}_l} - \frac{\partial \Psi_j}{\partial \bar{z}_l} \frac{\partial \bar{\Psi}_i}{\partial z_k} \right) dz_k \wedge d\bar{z}_l \quad (3.12)$$

$$\Psi^*(\omega_\Xi)_{(0,2)} = \frac{i}{2} \sum_{i,j,k,l=1}^n \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Xi}}{\partial x_i \partial x_j}(\Psi) \Psi_i \bar{\Psi}_j + \frac{\partial \tilde{\Xi}}{\partial x_j}(\Psi) \delta_{ij} \right) \frac{\partial \Psi_j}{\partial \bar{z}_k} \frac{\partial \bar{\Psi}_i}{\partial \bar{z}_l} d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_l. \quad (3.13)$$

(Qui e in seguito, con un leggero abuso di notazione, sarà sottinteso che le espressioni precedenti sono valutate in  $x_1 = |z_1|^2, \dots, x_n = |z_n|^2$ .) Siccome  $\Psi_j(z) = \tilde{\psi}_j(|z_1|^2, \dots, |z_n|^2) z_j$ , si ha:

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial z_k} = \frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial x_k} z_i \bar{z}_k + \tilde{\psi}_i \delta_{ik}, \quad \frac{\partial \Psi_i}{\partial \bar{z}_k} = \frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial x_k} z_k z_i \quad (3.14)$$

e

$$\frac{\partial \bar{\Psi}_i}{\partial \bar{z}_k} = \frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial x_k} z_k \bar{z}_i + \tilde{\psi}_i \delta_{ik}, \quad \frac{\partial \bar{\Psi}_i}{\partial z_k} = \frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial x_k} \bar{z}_k \bar{z}_i, \quad (3.15)$$

Inserendo (3.14) e (3.15) nelle (3.11) e nella (3.12) dopo un lungo calcolo si ottiene:

$$\Psi^*(\omega_\Xi)_{(2,0)} = \frac{i}{2} \sum_{k,l=1}^n \frac{A_{kl}}{2} \bar{z}_k \bar{z}_l dz_k \wedge dz_l \quad (3.16)$$

e

$$\Psi^*(\omega_\Xi)_{(1,1)} = \frac{i}{2} \sum_{k,l=1}^n \left[ \left( \frac{A_{kl} + A_{lk}}{2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Xi}}{\partial x_k \partial x_l}(\Psi) \tilde{\psi}_k^2 \tilde{\psi}_l^2 \right) \bar{z}_k z_l + \frac{\partial \tilde{\Xi}}{\partial x_k}(\Psi) \delta_{kl} \tilde{\psi}_k^2 \right] dz_k \wedge d\bar{z}_l, \quad (3.17)$$

dove

$$A_{kl} = \frac{\partial \tilde{\Xi}}{\partial x_k}(\Psi) \frac{\partial \tilde{\psi}_k^2}{\partial x_l} + \tilde{\psi}_k^2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{\Xi}}{\partial x_j \partial x_k}(\Psi) \frac{\partial \tilde{\psi}_j^2}{\partial x_l} |z_j|^2. \quad (3.18)$$

Si supponga ora che

$$\Psi^*(\omega_\Xi) = \omega_\Phi = \frac{i}{2} \sum_{k,l=1}^n \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x_k \partial x_l} \bar{z}_k z_l + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_l} \delta_{lk} \right)_{x_1=|z_1|^2, \dots, x_n=|z_n|^2} dz_k \wedge d\bar{z}_l.$$

Allora i termini  $\Psi^*(\omega_\Xi)_{(2,0)}$  e  $\Psi^*(\omega_\Xi)_{(0,2)}$  si devono annullare. Questo è equivalente al fatto che (3.18) è simmetrica in  $k, l$ .

Quindi, ponendo  $\Gamma_l = \tilde{\psi}_l^2 \frac{\partial \tilde{\Xi}}{\partial x_l}(\Psi)$ ,  $l = 1, \dots, n$ , l'equazione (3.17) diventa

$$\Psi^*(\omega_\Xi)_{(1,1)} = \frac{i}{2} \sum_{k,l=1}^n \left[ \left( A_{kl} + \frac{\partial^2 \tilde{\Xi}}{\partial x_k \partial x_l}(\Psi) \tilde{\psi}_k^2 \tilde{\psi}_l^2 \right) \bar{z}_k z_l + \frac{\partial \tilde{\Xi}}{\partial x_k}(\Psi) \delta_{kl} \tilde{\psi}_k^2 \right] dz_k \wedge d\bar{z}_l =$$



$$= \frac{i}{2} \sum_{k,l=1}^n \left( \frac{\partial \Gamma_l}{\partial x_k} \bar{z}_k z_l + \Gamma_k \delta_{kl} \right) dz_k \wedge d\bar{z}_l. \quad (3.19)$$

Quindi,  $\Psi^*(\omega_\Xi) = \omega_\Phi$  implica

$$\frac{i}{2} \sum_{k,l=1}^n \left( \frac{\partial \Gamma_l}{\partial x_k} \bar{z}_k z_l + \Gamma_k \delta_{lk} \right) dz_k \wedge d\bar{z}_l = \frac{i}{2} \sum_{k,l=1}^n \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x_k \partial x_l} \bar{z}_k z_l + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_l} \delta_{kl} \right) dz_k \wedge d\bar{z}_l.$$

In quest'uguaglianza si considerino i due casi  $l \neq k$  e  $l = k$ ; si ottiene rispettivamente

$$\frac{\partial \Gamma_l}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x_k \partial x_l} \quad (k \neq l)$$

e

$$\frac{\partial \Gamma_k}{\partial x_k} x_k + \Gamma_k = \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x_k^2} x_k + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k}.$$

Definendo  $A_k = \Gamma_k - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k}$ , queste equazioni diventano rispettivamente

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_l} = 0 \quad (l \neq k)$$

e

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_k} x_k = -A_k.$$

La prima equazione implica che  $A_k$  non dipende da  $x_l$  e quindi dalla seconda si ha

$$A_k = \Gamma_k - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k} = \frac{c_k}{x_k}, \quad (3.20)$$

per qualche costante  $c_k \in \mathbb{R}$ , cioè

$$\Gamma_k = \tilde{\psi}_k^2 \frac{\partial \tilde{\Xi}}{\partial x_k}(\Psi) = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k} + \frac{c_k}{x_k}, \quad k = 1, \dots, n,$$

ossia la (3.10).

Per dimostrare la seconda parte del Lemma 3.5, si osservi che derivando (3.10) rispetto a  $l$  si ottiene:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{c_k}{x_k^2} \delta_{kl} = A_{kl} + \frac{\partial^2 \tilde{\Xi}}{\partial x_k \partial x_l} \tilde{\psi}_k^2 \tilde{\psi}_l^2$$

con  $A_{kl}$  dato da (3.18). Dalle  $\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x_l \partial x_k}$  e  $\frac{\partial^2 \tilde{\Xi}}{\partial x_k \partial x_l} \tilde{\psi}_k^2 \tilde{\psi}_l^2 = \frac{\partial^2 \tilde{\Xi}}{\partial x_l \partial x_k} \tilde{\psi}_l^2 \tilde{\psi}_k^2$  si ha  $A_{kl} = A_{lk}$ . Allora, dalla (3.16), la parte di (2,0) (e (0,2)) in  $\Psi^*(\omega_\Xi)$  si annulla.

Inoltre, da (3.18) e (3.19), segue che  $\Psi^*(\omega_\Xi) = \omega_\Phi$ .  $\square$

Nella dimostrazione del Teorema 3.4 abbiamo bisogno anche del seguente lemma la cui dimostrazione segue dal Lemma 3.5 o da un calcolo diretto.

**Lemma 3.6.** *L'applicazione  $f : B^{2n}(1) \rightarrow \mathbb{C}^n$  data da*

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto \left( \frac{z_1}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n |z_i|^2}}, \dots, \frac{z_n}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n |z_i|^2}} \right) \quad (3.21)$$

*è un diffeomorfismo che soddisfa*

$$f^*(\omega_0) = \omega_{hyp} \quad (3.22)$$

e

$$f^*(\omega_{FS}) = \omega_0, \quad (3.23)$$

dove, nella seconda equazione, si pensa  $\mathbb{C}^n \xrightarrow{i} \mathbb{C}P^n$  come la carta affine  $Z_0 \neq 0$  in  $\mathbb{C}P^n$  dotata della restrizione della forma di Fubini–Study  $\omega_{FS}$  e dove  $\omega_0$  denota la restrizione a  $B^{2n}(1) \subset \mathbb{C}^n$  della forma standard di  $\omega_0$  di  $\mathbb{C}^n$ .

*Dimostrazione del Teorema 3.4.* Prima di tutto si ha che per l'ipotesi (3.4), i  $c_k$  che appaiono nell'enunciato del Lemma 3.5 sono tutti nulli. Quindi, l'esistenza di un'immersione simplettica speciale  $\Psi : M \rightarrow S$  è equivalente a

$$\tilde{\psi}_k^2 \frac{\partial \tilde{\Xi}}{\partial x_k}(\Psi) = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.24)$$

Se si assume che  $(S = \mathbb{C}^n, \omega_{\Xi} = \omega_0)$ , cioè  $\tilde{\Xi} = \sum_{j=1}^n x_j$ , allora la condizione (3.10) si riduce a

$$\tilde{\psi}_k^2 = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k}, \quad k = 1, \dots, n,$$

e quindi (3.5) segue dal Lemma 3.5. Inoltre  $\Psi_0$  è data da:

$$\Psi_0(z) = \left( \sqrt{\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_1}} z_1, \dots, \sqrt{\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_n}} z_n \right)_{x_i = |z_i|^2} \quad (3.25)$$

Per dimostrare la (i) quando  $(S = \mathbb{C}H^n, \omega_{\Xi} = \omega_{hyp})$  si osservi che dal momento che la composizione di applicazioni speciali è ancora speciale segue dalla (3.22) che l'esistenza di un'applicazione simplettica speciale  $\Psi : (M, \omega_{\Phi}) \rightarrow (\mathbb{C}H^n, \omega_{hyp})$  implica l'esistenza di un'applicazione simplettica speciale  $f \circ \Psi : (M, \omega_{\Phi}) \rightarrow$

$(\mathbb{C}^n, \omega_0)$ . Quest'ultima è univocamente determinata dal caso precedente, cioè  $\Psi_0 = f \circ \Psi$ . So  $\Psi_{hyp} := \bar{\Psi} = f^{-1} \circ \Psi_0$  e siccome l'inversa di  $f$  è data da

$$f^{-1} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}H^n, z \mapsto \left( \frac{z_1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n |z_i|^2}}, \dots, \frac{z_n}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n |z_i|^2}} \right),$$

si ottiene:

$$\Psi_{hyp}(z) = \left( \sqrt{\frac{\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_1}}{1 + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k} x_k}} z_1, \dots, \sqrt{\frac{\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_n}}{1 + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k} x_k}} z_n \right)_{x_i=|z_i|^2}. \quad (3.26)$$

Per dimostrare la (ii), so osservi che dalla (3.23) un'applicazione simplettica speciale  $\Psi : (M, \omega_\Phi) \rightarrow (\mathbb{C}^n, \omega_{FS})$  è univocamente determinata dall'applicazione simplettica speciale  $\Psi_0 = f^{-1} \circ \Psi : (M, \omega_\Phi) \rightarrow (\mathbb{C}H^n, \omega_0) \subset (\mathbb{C}^n, \omega_0)$  e quindi (3.6) segue immediatamente dal caso precedente (i). Inoltre  $\Psi_{FS}$  è data da

$$\Psi_{FS}(z) = \left( \sqrt{\frac{\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_1}}{1 - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k} x_k}} z_1, \dots, \sqrt{\frac{\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_n}}{1 - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_k} x_k}} z_n \right)_{x_i=|z_i|^2}. \quad (3.27)$$

Infine, si noti che le condizioni (3.7) e (3.8) per l'applicazione speciale (3.25) (risp. (3.27)), sono equivalenti a  $\Psi_0^{-1}(\{0\}) = \{0\}$  (risp.  $\Psi_{FS}^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ ) e al fatto che  $\Psi_0$  (risp.  $\Psi_{FS}$ ) sia propria. Quindi segue da argomenti topologici standard che  $\Psi_0$  (iesp.  $\Psi_{FS}$ ) è un diffeomorfismo.  $\square$

### 3.4 Esempi

In questo paragrafo verranno utilizzati i risultati ottenuti nel precedente per costruire vari esempi di embedding e simplettomorfismi simplettici per domini dotati di forma di Kähler invariante per rotazioni.

**Esempio 3.7.** Sia  $x_0 \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  e sia  $F : [0, x_0) \rightarrow (0, +\infty)$  una funzione liscia non crescente. Si consideri il dominio di  $\mathbb{C}^2$

$$D_F = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 < x_0, |z_2|^2 < F(|z_1|^2)\}$$

dotato della 2-forma

$$\omega_F = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \log \frac{1}{F(|z_1|^2) - |z_2|^2}.$$

Non è difficile vedere che se la funzione  $A(x) = -\frac{xF'(x)}{F(x)}$  soddisfa  $A'(x) > 0$  per ogni  $x \in [0, x_0)$ , allora  $\omega_F$  è una forma di Kähler su  $D_F$  e  $(D_F, \omega_F)$  è chiamato **il dominio completo di Reinhardt** associato a  $F$ . Si osservi che  $\omega_F$  è invariante per rotazioni con funzione associata  $\tilde{F}(x_1, x_2) = \log \frac{1}{F(x_1) - x_2}$ . Ha senso quindi cercare di applicare il Teorema 3.4 al dominio  $(D_F, \omega_F)$ . Si ha

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_1} = -\frac{F'(x_1)}{F(x_1) - x_2} > 0, \quad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_2} = \frac{1}{F(x_1) - x_2} > 0, \quad x_j = |z_j|^2, \quad j = 1, 2.$$

Quindi, per il Teorema 3.4,  $(D_F, \omega_F)$  ammette un'immersione simplettica speciale in  $(\mathbb{C}^2, \omega_0)$  (e in  $(\mathbb{C}H^2, \omega_{hyp})$ ). Inoltre, l'immersione è un simplettomorfismo quando

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_2} x_2 = \frac{x_2 - F'(x_1)x_1}{F(x_1) - x_2}$$

tende all'infinito sul bordo di  $D_F$ . Per esempio, sia  $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$  data da  $F(x) = \frac{c}{c+x}$ ,  $c > 0$  (risp.  $F(x) = \frac{1}{(1+x)^p}$ ,  $p \in \mathbb{N}^+$ ). Allora  $\sum_{i=1}^2 \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_i} x_i = \frac{x_2(c+x_1)^2 + cx_1}{c(c+x_1) - x_2(c+x_1)^2}$  (risp.  $\sum_{i=1}^2 \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_i} x_i = \frac{x_2 + px_1(1+x_1)^{-p-1}}{(1+x_1)^{-p} - x_2}$ ) non tende all'infinito, per  $t \rightarrow \infty$ , lungo la curva  $x_1 = t$ ,  $x_2 = \frac{\varepsilon c}{c+t}$ , for any  $\varepsilon \in (0, 1)$  (risp. non tende all'infinito, per  $t \rightarrow \infty$ , lungo la curva  $x_1 = t$ ,  $x_2 = \varepsilon(1+t)^{-p}$ , per ogni  $\varepsilon \in (0, 1)$ ).

D'altra parte, si verifica facilmente che, se  $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$  è data da  $F(x) = e^{-x}$  (resp.  $F : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $F(x) = (1-x)^p$ ,  $p > 0$ ), then  $\sum_{i=1}^2 \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_i} x_i = \frac{x_2 + e^{-x_1} x_1}{e^{-x_1} - x_2}$  (resp.  $\sum_{i=1}^2 \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_i} x_i = \frac{x_2 + px_1(1-x_1)^{p-1}}{(1-x_1)^p - x_2}$ ) tende all'infinito sul bordo di  $D_F$ . Quindi in questo caso  $(D_F, \omega_F)$  è simplettomorfo a  $(\mathbb{R}^4, \omega_0)$ .

**Esempio 3.8.** Si doti  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  della forma di Kähler (invariante per rotazioni)  $\omega_\Phi = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \Phi$  con funzione associata

$$\tilde{\Phi}(x_1, x_2) = a \log(x_1 + x_2) + b(x_1 + x_2) + c, \quad a, b, c > 0.$$

La metrica  $g_\Phi$  associata a  $\omega_\Phi$  è usata in [23] (see also [13]).

Siccome  $\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_i} = b + \frac{a}{x_1 + x_2} > 0$ , per il Teorema 3.4 esiste un'immersione simplettica speciale di  $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \omega_\Phi)$  in  $(\mathbb{C}^2, \omega_0)$  (oppure in  $(\mathbb{C}H^2, \omega_{hyp})$ ).

**Esempio 3.9.** Sia  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  con la forma di Kähler data da:  $\omega_\Phi = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\Phi$ , dove

$$\tilde{\Phi} = \sqrt{r^4 + 1} + 2 \log r - \log(\sqrt{r^4 + 1} + 1), \quad r = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}.$$

La metrica  $g_\Phi$  è usata in [9] per la costruzione della cosiddetta metrica di Eguchi–Hanson. Un calcolo mostra che

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \left[ \frac{4r^3}{2\sqrt{r^4 + 1}} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{r^4 + 1} + 1} \right) + \frac{2}{r} \right] \frac{1}{2r} > 0,$$

quindi per il Teorema 3.4 esiste un'immersione simplettica speciale di  $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \omega_\Phi)$  in  $(\mathbb{C}^2, \omega_0)$  (oppure in  $(\mathbb{C}H^2, \omega_{hyp})$ ).

**Esempio 3.10.** In [12] Claude LeBrun considera la seguente famiglia di forme di Kähler su  $\mathbb{C}^2$  definite da  $\omega_m = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\Phi_m$ , dove

$$\Phi_m(u, v) = u^2 + v^2 + m(u^4 + v^4), \quad m \geq 0$$

e dove  $u$  e  $v$  sono definite implicitamente da:

$$|z_1| = e^{m(u^2 - v^2)}u, \quad |z_2| = e^{m(v^2 - u^2)}v.$$

Per  $m = 0$  si ottiene la metrica piatta su  $\mathbb{C}^2$ , mentre per  $m > 0$  ognuna delle metriche di questa famiglia fornisce il primo esempio di metrica con curvatura di Ricci piatta (e non piatta) su  $\mathbb{C}^2$  con lo stesso volume della metrica piatta, cioè  $\omega_m \wedge \omega_m = \omega_0 \wedge \omega_0$ . Inoltre, per  $m > 0$ , queste metriche sono isometriche (ad un multiplo) della cosiddetta metrica di **Taub-NUT**.

Ora, con l'aiuto del Teorema 3.4, si vuole far vedere che per ogni  $m$  la varietà di Kähler  $(\mathbb{C}^2, \omega_m)$  ammette coordinate simplettiche globali. Sia  $u^2 = U$ ,  $v^2 = V$ . Allora  $\tilde{\Phi}_m$  (la funzione associata a  $\Phi_m$ ) soddisfa:

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_m}{\partial x_1} = \frac{\partial \tilde{\Phi}_m}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_m}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_m}{\partial x_2} = \frac{\partial \tilde{\Phi}_m}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_m}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial x_2},$$

dove  $x_j = |z_j|^2, j = 1, 2$ . Per calcolare  $\frac{\partial U}{\partial x_j}$  e  $\frac{\partial V}{\partial x_j}, j = 1, 2$ , si consideri l'applicazione

$$G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (U, V) \mapsto (x_1 = e^{2m(U-V)}U, x_2 = e^{2m(V-U)}V)$$

e la sua matrice Jacobiana:

$$J_G = \begin{pmatrix} (1 + 2mU) e^{2m(U-V)} & -2mU e^{2m(U-V)} \\ -2mV e^{2m(V-U)} & (1 + 2mV) e^{2m(V-U)} \end{pmatrix}.$$

Si ha  $\det J_G = 1 + 2m(U + V) \neq 0$ , e quindi

$$J_G^{-1} = J_{G^{-1}} = \frac{1}{1 + 2m(U + V)} \begin{pmatrix} (1 + 2mV)e^{2m(V-U)} & 2mU e^{2m(U-V)} \\ 2mV e^{2m(V-U)} & (1 + 2mU)e^{2m(U-V)} \end{pmatrix}.$$

Dal momento che  $J_{G^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_1} & \frac{\partial U}{\partial x_2} \\ \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} \end{pmatrix}$ , con un calcolo diretto si ottiene

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_m}{\partial x_1} = (1 + 2mV)e^{2m(V-U)} > 0, \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}_m}{\partial x_2} = (1 + 2mU)e^{2m(U-V)} > 0,$$

e

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}_m}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial \tilde{\Phi}_m}{\partial x_2} x_2 \right) = \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} (U + V + 4mUV) = +\infty,$$

cioè (3.7) e (3.8) descritte sopra. Quindi, per il Teorema 3.4, l'applicazione

$$\Psi_0 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, (z_1, z_2) \mapsto \left( (1 + 2mV)^{\frac{1}{2}} e^{m(V-U)} z_1, (1 + 2mU)^{\frac{1}{2}} e^{m(U-V)} z_2 \right)$$

è un simplettomorfismo (speciale) da  $(\mathbb{C}^2, \omega_m)$  in  $(\mathbb{C}^2, \omega_0)$ .

**Osservazione 3.11.** Osserviamo che per  $m > 0$  non si può applicare il Theorema F di McDuff per ottenere l'esistenza di coordinate simplettiche globali di  $(\mathbb{C}^2, \omega_m)$ . Infatti, la curvatura sezionale di  $(\mathbb{C}^2, g_m)$  (dove  $g_m$  è la metrica di Kähler associata a  $\omega_m$ ) è positiva in qualche punto, dal momento che  $g_m$  ha curvatura di Ricci nulla ma non è piatta.

### 3.5 Un altro esempio: la forma di Calabi

In questo paragrafo è trattato un importante esempio di dominio di  $\mathbb{C}^n$  con una forma di Kähler  $\omega$  che, a differenza degli esempi trattati nel paragrafo precedente, non è invariante per rotazioni. Sia  $M = \frac{1}{2}D_a \oplus i\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ ,  $n \geq 2$ , dove  $D_a \subset \mathbb{R}^n$  è la palla aperta di  $\mathbb{R}^n$  centrata nell'origine di raggio  $a$ . Sia  $\omega$  la 2-forma su  $M$  data da

$$\omega = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} f(z_1 + \bar{z}_1, \dots, z_n + \bar{z}_n), \quad (3.28)$$

dove  $f: D_a \rightarrow \mathbb{R}$  è la funzione radiale  $f(x_1, \dots, x_n) = Y(r)$ ,  $r = (\sum_{j=1}^n x_j^2)^{1/2}$ ,  $x_j = (z_j + \bar{z}_j)/2$ ,  $y_j = (z_j - \bar{z}_j)/2i$ , che soddisfa l'equazione differenziale:

$$(Y'/r)^{n-1} Y'' = e^Y, \quad (3.29)$$

con condizioni iniziali:

$$Y'(0) = 0, \quad Y''(0) = e^{Y(0)/n}. \quad (3.30)$$

Eugenio Calabi [3] ha dimostrato che  $\omega$  è una forma di Kähler e che la metrica associata  $g$  è di Einstein ma non omogenea. In effetti questo è stato il primo esempio di metrica di Einstein e non omogenea. Si vuole dimostrare il seguente risultato ottenuto da Andrea Loi e Michela Zedda in [15].

**Theorem 3.12.** *Per tutti gli  $n \geq 2$ , la varietà simplettica  $(M, \omega)$  è globalmente simplettomorfa a  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  tramite l'applicazione:*

$$\Phi: M \rightarrow \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}, \quad (x, y) \mapsto (\text{grad } f, y), \quad (3.31)$$

dove  $f: D_a \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x)$  è un potenziale di Kähler per  $\omega$ , cioè  $\omega = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} f$ , e  $\text{grad } f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ .

**Osservazione 3.13.** Calabi [3] stesso fornisce una formula esplicita del tensore di curvatura di  $(M, g)$ . Nonostante questo, è difficile calcolare il segno della curvatura sezionale di  $g$ . Conseguentemente non è chiaro se  $g$  soddisfa o no le condizioni del Teorema F (di McDuff), cioè se la sua curvatura sezionale è non positiva. D'altra parte, come si è già osservato, il teorema di McDuff fornisce coordinate simplettiche globali ma non da alcun criterio per calcolarle esplicitamente.

*Dimostrazione del Teorema 3.12.* Si dimostra che l'applicazione  $\Phi$  data da (3.31) soddisfa  $\Phi^*\omega_0 = \omega$ . Per semplificare la notazione si scriverà  $\partial f/\partial x_j = f_j$  e  $\partial^2 f/\partial x_j \partial x_k = f_{jk}$ . Il pull-back di  $\omega_0$  tramite  $\Phi$  si ottiene come:

$$\Phi^*\omega_0 = \sum_{j=1}^n df_j \wedge dy_j = \sum_{j,k=1}^n f_{jk} dx_k \wedge dy_j = \frac{i}{2} \sum_{j,k=1}^n f_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k,$$

e quindi l'uguaglianza voluta segue da:

$$\omega = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} f(z_1 + \bar{z}_1, \dots, z_n + \bar{z}_n) = \frac{i}{2} \sum_{j,k=1}^n f_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k.$$

Dal momento che  $\omega$  e  $\omega_0$  sono non degeneri segue dal teorema della funzione inversa che  $\Phi$  è un diffeomorfismo locale. Per concludere la dimostrazione è sufficiente verificare che  $\Phi$  è un'applicazione propria, dal quale seguirà che è un rivestimento e quindi un diffeomorfismo globale. Il fatto che  $\Phi$  sia propria è equivalente a:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \partial M} \Phi(x, y) = \infty$$

oppure a

$$\lim_{x \rightarrow \partial D_a} \|\text{grad } f(x)\| = \infty.$$

Questo segue da  $f_j(x) = \frac{x_j}{r} Y'(r)$  e dal fatto che  $Y'(r)$  va all'infinito quando  $r \rightarrow a$  (la dimostrazione di quest'ultima affermazione non è banale e si trova nell'articolo [3]). □



# Capitolo 4

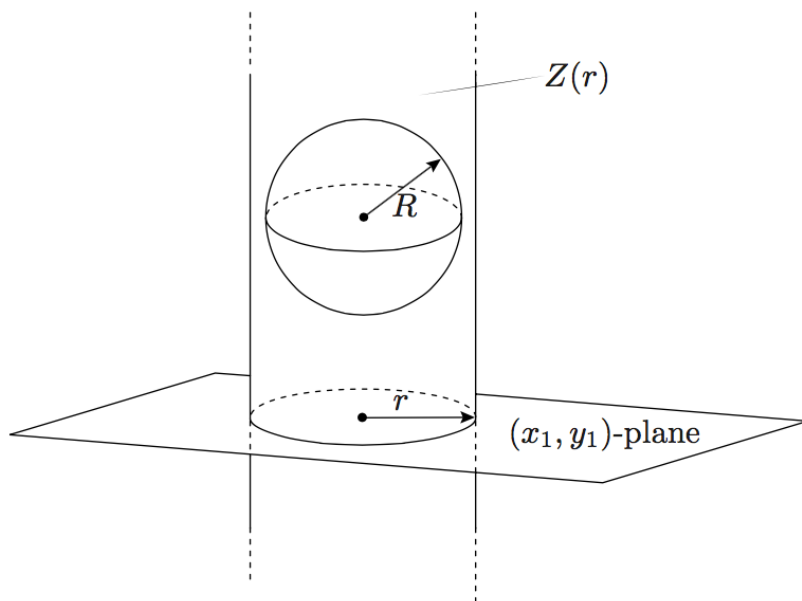
## Il Teorema non-squeezing e le capacità simplettiche

### 4.1 Il Teorema non-squeezing e il camello simplettico

Per comprendere il comportamento di certe applicazioni dal punto di vista geometrico, la prima cosa che si può cercare di fare è vedere come vengono trasformati gli oggetti geometrici di base, quali le palle, gli ellissoidi e i cilindri, dalle applicazioni in questione. Per quanto riguarda il comportamento dei diffeomorfismi che conservano i volumi la risposta è ben nota. Infatti si dimostra che esiste un diffeomorfismo da una palla aperta  $B \subset \mathbb{R}^{2n}$  in un aperto  $U \subset \mathbb{R}^{2n}$  se e solo se  $B$  e  $U$  sono diffeomorfi e hanno lo stesso volume. Come si è già osservato in precedenza, ogni simplettomorfismo  $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  è un diffeomorfismo che conserva i volumi, in quanto  $\varphi^*\omega_0 = \omega_0$  implica  $\varphi^*\omega_0^n = \omega_0^n$ . Per lungo tempo si è pensato che il gruppo dei simplettomorfismi  $\text{Symp}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  fosse incluso strettamente nel gruppo dei diffeomorfismi che conservano i volumi. D'altra parte non esisteva un risultato che mettesse in evidenza le differenze tra i due gruppi, fino a quando Gromov [5] ha dimostrato il suo Teorema non-squeezing nel 1985. Il suo enunciato è il seguente.

**Theorem 4.1.** *Esiste un embedding simplettico da  $(B^{2n}(r), \omega_0)$  a  $(Z^{2n}(R), \omega_0)$  se e solo se  $r \leq R$ .*

Qui come nei capitoli precedenti  $B^{2n}(r)$  denota la palla aperta in  $\mathbb{R}^{2n}$  centrata nell'origine e di raggio  $r$  e  $Z^{2n}(R)$  il cilindro simplettico cioè  $Z^{2n}(R) = B^2(r) \times \mathbb{R}^{2n-2}$  (dove  $B^2(r)$  è il disco rispetto alle coordinate  $(x_1, y_1)$  e non  $(x_1, x_2)$ ). Si osservi che la parte notevole del Teorema 4.1 è il fatto che se una palla ammette un embedding simplettico in un cilindro simplettico, allora il suo raggio deve essere minore di quello del cilindro.



Ovviamente questo teorema generalizza il Teorema 1.8 del primo capitolo nel caso affine.

L'applicazione  $\Phi : B^{2n}(R) \rightarrow Z^{2n}(r)$  definita da:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \mapsto \left( \lambda x_1, \frac{1}{\lambda} x_2, x_3, \dots, x_n, \lambda y_1, \frac{1}{\lambda} y_2, y_3, \dots, y_n \right)$$

è un embedding che conserva i volumi (in quanto  $\Phi^* \omega_0^n = \omega_0^n$ ) e per  $\lambda < \frac{R}{r}$  si ha che  $\Phi(B^{2n}(R)) \subset Z^{2n}(r)$ . Quindi il teorema non-squeezing non vale se al posto di

embedding simplettici si considerano embedding che conservano i volumi. Questo fatto mostra che l'inclusione di  $\text{Symp}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  nel gruppo dei simplettomorfismi che conservano i volumi è stretta.

Il Teorema non-squeezing è un risultato fondazionale che ha dato origine ad una nuova disciplina che oggi va sotto il nome di **topologia simplettica**. La dimostrazione originaria di Gromov è alquanto complessa e non farà parte di questa tesi.

Una dimostrazione alternativa può essere ottenuta tramite il concetto di capacità simplettica, argomento trattato nel prossimo paragrafo.

Un altro problema simile al non-squeezing è quello del **camello simplettico**. La domanda è se esista un'isotopia simplettica di un palla aperta che permetta alla palla di passare in un piccolo buco in un muro. Più precisamente si prenda come "muro" l'iperpiano  $W = \{y_1 = 0\}$  e come "buco" l'insieme  $H_\epsilon = \{z \in W \mid \sum_{j=1}^n x_j^2 + y_j^2 < r^2\}$ . Allora la domanda è se sia possibile trovare una famiglia continua

$$\varphi_t : B^{2n}(r) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad t \in [0, 1]$$

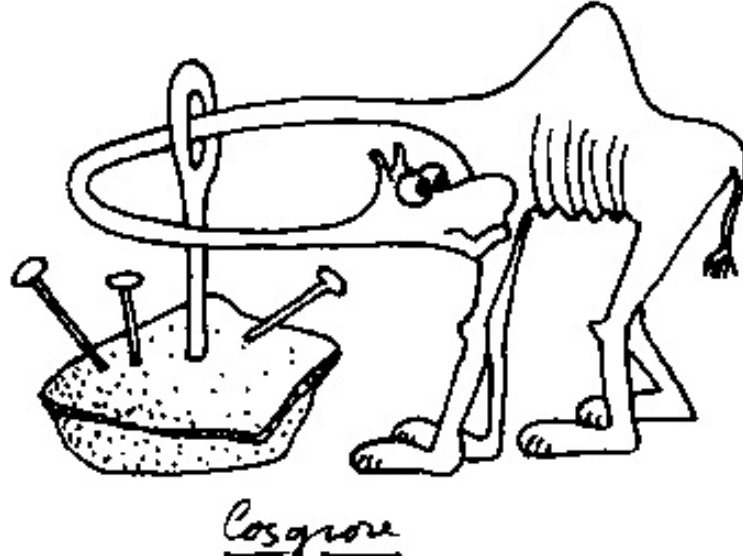
di embedding simplettici che passino attraverso il buco:

$$\varphi_t(B^{2n}(r)) \subset \mathbb{R}^{2n} \setminus (W \setminus H_\epsilon) = (\mathbb{R}^{2n} \setminus W) \cup H_\epsilon$$

e che inizino e finiscano prima e dopo il muro:

$$\varphi_0(B^{2n}(r)) \subset \{y_1 < 0\}, \quad \varphi_1(B^{2n}(r)) \subset \{y_1 > 0\}.$$

Chiaramente questo è possibile se il raggio  $\epsilon$  del muro è almeno 1. Il vero problema si verifica quando  $\epsilon < 1$ . Il metodo sviluppato da Gromov [5] dimostra che in questo caso non esiste un'isotopia con le proprietà richieste. Il Teorema in questione è diventato famoso come il **Teorema del cammello simplettico** da quando Ian Stewart ha fatto allusione alla parabola del cammello e della cruna dell'ago.



Un cammello symplettico non può passare attraverso la cruna di un ago.

## 4.2 Capacità symplettiche: definizioni e prime proprietà

Si consideri la classe di tutte le varietà symplettiche  $(M, \omega)$  (eventualmente con bordo) di dimensione fissata  $2n$ . Una **capacità symplettica** è un'applicazione  $(M, \omega) \mapsto c(M, \omega)$  che associa ad una varietà symplettica  $(M, \omega)$  un numero reale non negativo o infinito che soddisfi gli assiomi seguenti.

**C1 (monotonia)**  $c(M, \omega) \leq c(N, \tau)$ , se esiste un embedding symplettico  $\varphi : (M, \omega) \rightarrow (N, \tau)$ ;

**C2 (conformalità)**  $c(M, \alpha\omega) = |\alpha|c(M, \omega) \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;

**C3 (non banalità)**  $c(B^{2n}(1), \omega_0) = \pi = c(Z^{2n}(1))$ ;

dove  $B^{2n}(1)$  è la palla aperta di raggio unitario e  $Z^{2n}(1)$  è il cilindro symplettico. Si ricorda che nelle coordinate symplettiche  $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  la palla e il cilindro di raggio  $r > 0$  sono dati da:

$$B^{2n}(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid |x|^2 + |y|^2 < r^2\}$$

e

$$Z^{2n}(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_1^2 + y_1^2 < r^2\}.$$

**Osservazione 4.2.** Gli assiomi  $C1 - C3$  non determinano univocamente una capacità simplettica. Anzi esistono varie capacità simplettiche come si avrà modo di vedere in seguito.

**Osservazione 4.3.** Nel caso in cui  $n = 1$ , ossia nel caso 2-dimensionale, il modulo dell'area totale

$$c(M, \omega) = \left| \int_M \omega \right|$$

è un esempio di capacità simplettica. Se la dimensione  $n > 1$  allora  $(\text{Vol}(M, \omega))^{\frac{1}{n}}$  soddisfa gli assiomi  $C1$  e  $C2$ , ma  $C3$  non è soddisfatto in quanto il volume del cilindro  $Z^{2n}(r)$  simplettico,  $n > 1$ , è infinito (e non  $\pi$ ). In effetti costruire una capacità simplettica per  $n > 1$  non è un fatto banale.

L'importanza delle capacità simplettiche risiede nel fatto che sono invarianti simplettici.

**Proposizione 4.4.** Sia  $\varphi : (M, \omega) \rightarrow (N, \sigma)$  un simplettomorfismo tra due varietà simplettiche  $(M, \omega)$  e  $(N, \sigma)$ . Allora

$$c(M, \omega) = c(N, \sigma).$$

*Dimostrazione.* Basta osservare che  $\varphi$  (risp.  $\varphi^{-1}$ ) è un embedding simplettico e quindi per la  $C1$  si ha  $c(M, \omega) \leq c(N, \sigma)$  (risp.  $c(N, \sigma) \leq c(M, \omega)$ ), segue che  $c(M, \omega) = c(N, \sigma)$ .  $\square$

Se  $U$  e  $V$  sono sottoinsiemi di una varietà simplettica  $(M, \omega)$  allora, sempre dalla  $C1$ , si ottiene che

$$U \subset V \Rightarrow c(U, \omega) \leq c(V, \omega).$$

Per descrivere alcuni esempi di sottoinsiemi di  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  dimostriamo un semplice lemma.

**Lemma 4.5.** *Sia  $U$  un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^{2n}$  e sia  $\lambda \neq 0$ . Allora*

$$c(\lambda U, \omega_0) = \lambda^2 c(U, \omega_0)$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione segue dalla C2. Infatti il diffeomorfismo

$$\varphi : \lambda U \rightarrow U, \quad x \mapsto \frac{1}{\lambda} x$$

soddisfa  $\varphi^*(\lambda^2 \omega_0) = \lambda^2 \varphi^* \omega_0$ . Quindi  $\varphi$  è un simplettomorfismo tra  $(\lambda U, \omega_0)$  e  $(U, \lambda^2 \omega_0)$ . Per la Proposizione 4.4 e per la conformalità

$$c(\lambda U, \omega_0) = c(U, \lambda^2 \omega_0) = \lambda^2 c(U, \omega_0).$$

□

**Corollario 4.6.** *Sia  $r > 0$ . Allora*

$$c(B^{2n}(r), \omega_0) = c(\overline{B^{2n}(r)}, \omega_0) = c(Z^{2n}(r), \omega_0) = c(\overline{Z^{2n}(r)}, \omega_0) = \pi r^2.$$

*Dimostrazione.* Dal lemma precedente e dalla non banalità C3 si ha:

$$c(B^{2n}(r), \omega_0) = c(rB^{2n}(1), \omega_0) = r^2 c(B^{2n}, \omega_0)(1) = \pi r^2.$$

Dal momento che  $B^{2n}(r) \subset \overline{B^{2n}(r)} \subset B^{2n}(r + \epsilon)$ , per ogni  $\epsilon > 0$ , si deduce allora dalla C1 che

$$\pi r^2 = c(B^{2n}(r), \omega_0) \leq c(\overline{B^{2n}(r)}, \omega_0) \leq c(B^{2n}(r + \epsilon), \omega_0) = \pi(r + \epsilon)^2.$$

Facendo tendere  $\epsilon$  a zero si ottiene quindi  $c(\overline{B^{2n}(r)}, \omega_0) = \pi r^2$ . Un ragionamento identico, prendendo il cilindro  $Z^{2n}(r)$  al posto di  $B^{2n}(r)$ , mostra che  $c(Z^{2n}(r), \omega_0) = c(\overline{Z^{2n}(r)}, \omega_0) = \pi r^2$ . □

**Osservazione 4.7.** Osserviamo che il cilindro simplettico

$$Z_j^{2n}(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_j^2 + y_j^2 < r^2\}.$$

è simplettomorfo a  $Z_1^{2n}(r) = Z^{2n}(r)$ . Segue allora dalla proposizione precedente che  $c(Z_j^{2n}(r), \omega_0) = c(\overline{Z_j^{2n}(r)}, \omega_0) = \pi r_1^2$ . Se invece si considera per esempio il cilindro

$$W^{2n}(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_1^2 + x_2^2 < r^2\}, r > 0.$$

allora

$$c(W^{2n}(r), \omega_0) = +\infty,$$

per qualunque capacità simplettica. Infatti per ogni  $N > 0$  l'applicazione

$$\varphi : B^{2n}(N) \rightarrow W^{2n}(r), (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \mapsto \left( \frac{r}{N}x_1, \dots, \frac{r}{N}x_n, \frac{N}{r}y_1, \dots, \frac{N}{r}y_n \right)$$

è un embedding (lineare) simplettico e segue dalla  $C1$  e dal Corollario 4.6 che

$$\pi N^2 = c(B^{2n}(N), \omega_0) \leq c(W^{2n}(r), \omega_0).$$

L'ultima disuguaglianza è vera per ogni  $N$  e quindi si ottiene  $c(W^{2n}(r), \omega_0) = +\infty$ .

**Osservazione 4.8.** Dalla considerazioni precedenti si ottiene che nel caso particolare di  $(\mathbb{R}^2, \omega_0)$  valgono le seguenti uguaglianze

$$c(B^2(r), \omega_0) = c(\overline{B^2(r)}, \omega_0) = \text{area}(B^2(r))$$

ossia la capacità simplettica coincide con la misura di Lebesgue. Si dimostra che se  $D \subset \mathbb{R}^2$  è un sottoinsieme compatto e connesso di  $\mathbb{R}^2$  con bordo liscio allora  $c(D, \omega_0) = \text{area}(D)$  (per una dimostrazione si veda la Proposizione 1 in [11]).

**Osservazione 4.9.** Ovviamente, dalla conformalità si ha che

$$0 < c(U, \omega_0) < +\infty,$$

per ogni sottoinsieme  $U \subset \mathbb{R}^{2n}$  aperto e limitato, in quanto  $U$  contiene una palla aperta ed è contenuto in una palla aperta.

Dal Corollario 4.6 si ottiene anche:

**Proposizione 4.10.** *Sia  $U \subset \mathbb{R}^{2n}$  un sottoinsieme aperto tale che*

$$B^{2n}(r) \subset U \subset Z^{2n}(r),$$

*per un certo  $r > 0$ . Allora*

$$c(U, \omega_0) = \pi r^2.$$

In particolare se  $E \subset \mathbb{R}^{2n}$  è un ellissoide centrato nell'origine con spettro simplettico  $r = (r_1, \dots, r_n)$ ,  $0 < r_1 \leq \dots \leq r_n$  (vedi Paragrafo 1.3 del Capitolo 1) allora

$$c(E, \omega_0) = \pi r_1^2.$$

Infine se  $E$  e  $F$  sono due ellissoidi di  $\mathbb{R}^{2n}$  con spettro simplettico  $r = (r_1, \dots, r_n)$ ,  $0 < r_1 \leq \dots \leq r_n$  e  $s = (s_1, \dots, s_n)$ ,  $0 < s_1 \leq \dots \leq s_n$  rispettivamente, e se esiste un embedding simplettico  $\varphi : E \rightarrow F$ , allora  $r_1 \leq s_1$ .

*Dimostrazione.* Per le ipotesi su  $U$ , per la C1 e per il Corollario 4.6 si ottiene

$$\pi r^2 = c(B^{2n}(r), \omega_0) \leq c(U, \omega_0) \leq c(Z^{2n}(r), \omega_0) = \pi r^2$$

e quindi  $c(U, \omega_0) = \pi r^2$ . Osserviamo che esiste un simplettomorfismo  $\psi : E \rightarrow E(r)$  tale che  $\psi(E) = E(r)$  e che  $B^{2n}(r_1) \subset E(r) \subset Z^{2n}(r_1)$ . Segue allora dalla Proposizione 4.4 e dalla prima parte della proposizione che

$$c(E, \omega_0) = c(E(r), \omega_0) = \pi r_1^2.$$

L'ultima parte della dimostrazione segue dalla C1. □

Si conclude questo paragrafo facendo vedere che l'esistenza di (almeno) una capacità simplettica fornisce una dimostrazione immediata del teorema non-squeezing di Gromov. Si ricorda che il teorema in questione afferma che *esiste un embedding simplettico  $\varphi : B^{2n}(r) \rightarrow Z^{2n}(R)$  se e solo se  $r \leq R$ .*

*Dimostrazione del teorema non-squeezing di Gromov.* Come si è già osservato la parte difficile è dimostrare che se esiste un tale embedding allora  $r \leq R$  (se infatti  $r \leq R$  allora l'inclusione  $B^{2n}(r) \subset Z^{2n}(R)$  è l'embedding cercato). Sia dunque  $\varphi : B^{2n}(r) \rightarrow Z^{2n}(R)$  un embedding simplettico cioè tale che  $\varphi^* \omega_0 = \omega_0$  e sia  $c$  una capacità simplettica qualunque. Per la monotonia di  $c$  e per il Corollario 4.6 si ha:

$$\pi r^2 = c(B^{2n}(r), \omega_0) \leq c(Z^{2n}(R), \omega_0) = \pi R^2$$

da cui  $r \leq R$ . □



### 4.3 Il Gromov width di una varietà simplettica

Si ricorda che data una varietà simplettica  $(M, \omega)$  allora dal Teorema di Darboux (Teorema 3.1) esiste  $r > 0$  e un embedding simplettico  $\varphi : B^{2n}(r) \rightarrow (M, \omega)$ . Ha senso quindi definire il **Gromov width**  $w_G(M)$  di una varietà simplettica  $(M, \omega)$  come:

$$w_G(M, \omega) = \sup\{\pi r^2 \mid \text{esiste un embedding simplettico } \varphi : (B^{2n}(r), \omega_0) \rightarrow (M, \omega)\} \quad (4.1)$$

**Osservazione 4.11.** Dal momento che una varietà simplettica compatta  $(M, \omega)$  ha volume finito, segue dalla definizione che  $w_G(M, \omega) < +\infty$ .

Il Gromov width soddisfa la condizione  $w_G(\lambda U, \omega_0) = \lambda^2 w_G(U, \omega_0)$  per ogni aperto  $U \subset \mathbb{R}^{2n}$  (si confronti con lo spessore simplettico lineare trattato nel Paragrafo 1.3 del Capitolo 1).

In effetti il risultato seguente mostra che il Gromov width è una capacità simplettica ed è la più piccola capacità simplettica.

**Theorem 4.12.** *Il Gromov width  $w_G$  è una capacità simplettica. Inoltre*

$$w_G(M, \omega) \leq c(M, \omega),$$

per ogni capacità simplettica  $c$ .

*Dimostrazione.* La monotonia di  $w_G$  si ottiene dal fatto che se  $\varphi : (B^{2n}(r), \omega_0) \rightarrow (M, \omega_0)$  e  $\psi : (M, \omega) \rightarrow (N, \tau)$  sono due embedding simplettici allora  $\psi \circ \varphi : (B^{2n}(r), \omega_0) \rightarrow (N, \tau)$  è ancora un embedding simplettico.

Per dimostrare la conformalità e cioè che  $w_G(M, \alpha\omega) = |\alpha| w_G(M, \omega)$ ,  $\alpha \neq 0$ , è sufficiente dimostrare che ad ogni embedding simplettico

$$\varphi : (B^{2n}(r), \omega_0) \rightarrow (M, \alpha\omega_0),$$

è possibile associare un embedding simplettico

$$\hat{\varphi} : (B^{2n}(\rho), \omega_0) \rightarrow (M, \omega_0), \quad \rho = \frac{r}{\sqrt{|\alpha|}},$$

e viceversa, e quindi dalla definizione di  $w_G$ , si ottiene  $w_G(M, \alpha\omega) = |\alpha|w_G(M, \omega)$ . Per fare vedere questo sia  $\varphi : (B^{2n}(r), \omega_0) \rightarrow (M, \alpha\omega_0)$  un embedding simplettico,  $\varphi^*(\alpha\omega) = \omega_0$ , e quindi

$$\varphi^*\omega = \alpha^{-1}\omega_0.$$

Sia  $\psi : B^{2n}(\rho) \rightarrow B^{2n}(r)$  il diffeomorfismo dato da

$$\psi(x) = \sqrt{|\alpha|} \cdot x, \quad x \in B^{2n}(\rho),$$

e quindi

$$\psi^*(\alpha^{-1}\omega_0) = \frac{|\alpha|}{\alpha}\omega_0.$$

Se  $\alpha > 0$  allora l'applicazione  $\hat{\varphi} = \varphi \circ \psi : (B^{2n}(\rho), \omega_0) \rightarrow (M, \omega)$  è l'embedding simplettico cercato. Se invece  $\alpha < 0$  e considerando il simplettomorfismo

$$\psi_0 : (B^{2n}(\rho), \omega_0) \rightarrow (B^{2n}(\rho), \omega_0), \quad (u, v) \mapsto (-u, v), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^{2n},$$

si ottiene il simplettomorfismo desiderato prendendo

$$\hat{\varphi} = \varphi \circ \psi \circ \psi_0 : (B^{2n}(\rho), \omega_0) \rightarrow (M, \omega).$$

Infine si mostra che  $w_G$  soddisfa  $w_G(B^{2n}(r), \omega_0) = w_G(Z^{2n}(r), \omega_0) = \pi r^2$  (la non banalità). Se  $\varphi : B^{2n}(R) \rightarrow B^{2n}(r)$  è un embedding simplettico, si deduce che  $R \leq r$  in quanto  $\varphi$  conserva i volumi. D'altra parte l'applicazione identità  $B^{2n}(r) \rightarrow B^{2n}(r)$  è (ovviamente) un embedding simplettico e quindi segue l'uguaglianza  $w_G(B^{2n}(r), \omega_0) = \pi r^2$ . Dal momento che il Teorema non-squeezing afferma che esiste un embedding simplettico  $\varphi : B^{2n}(R) \rightarrow B^{2n}(r)$  se e solo se  $R \leq r$  si ha che  $w_G(Z^{2n}(r), \omega_0) = \pi r^2$ .

Infine, sia  $c$  una capacità qualunque e  $\varphi : (B^{2n}(r), \omega_0) \rightarrow (M, \omega)$  un embedding simplettico. Per la monotonia e la non banalità si ha:

$$\pi r^2 = c(B^{2n}(r), \omega_0) \leq c(M, \omega)$$

e passando all'estremo superiore si ottiene  $w_G(M, \omega) \leq c(M, \omega)$ ; la dimostrazione del teorema è conclusa.  $\square$

**Osservazione 4.13.** Mettendo insieme quello dimostrato sino a questo momento, si può affermare che *il teorema non-squeezing di Gromov è equivalente all'esistenza di almeno una capacità simplettica (il Gromov width).*

Il calcolo esplicito del Gromov width per varietà simplettiche può essere molto complicato (si veda l'articolo [16] e le referenze in esso contenute). L'intento del seguente esempio è quello di dare un'idea di come calcolare il Gromov width delle forme spaziali complesse.

## Il Gromov width delle forme spaziali complesse

Il Gromov width di  $(\mathbb{C}^n, \omega_0) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  ha valore infinito così come quello dello spazio iperbolico complesso  $(B^{2n}(1), \omega_{hyp})$  essendo quest'ultimo simplettomorfo a  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ .

Per calcolare il Gromov width dello spazio proiettivo complesso si osservi che esiste un embedding  $f : B^{2n}(1) \rightarrow \mathbb{C}^n$  dato da

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto \left( \frac{z_1}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n |z_i|^2}}, \dots, \frac{z_n}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n |z_i|^2}} \right) \quad (4.2)$$

tale che  $f^*(\omega_{FS}) = \omega_0$  (si veda il Lemma 3.6), dove si sta identificando  $\mathbb{C}^n$  con la carta affine  $U_0 = \{Z_0 \neq 0\} \subset \mathbb{C}P^n$  e  $\omega_{FS}$  è la forma di Fubini–Study. Per la monotonia e la non banalità del Gromov width si ottiene allora

$$\pi = w_G(B^{2n}(1), \omega_0) \leq w_G(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS}).$$

D'altra parte si può dimostrare (fatto non semplice) che  $w_G(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS}) \leq \pi$ . Segue quindi che

$$w_G(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS}) = \pi.$$

**Osservazione 4.14.** Lo spazio proiettivo complesso è un esempio di varietà di Kähler omogenea, semplicemente connessa con secondo numero di Betti uguale a uno. In un preprint recente [18] A.Loi e F. Zuddas hanno dimostrato che in effetti per ogni varietà di Kähler omogenea semplicemente connessa  $(M, \omega)$  con secondo numero di Betti uguale a uno si ha  $w_G(M, \omega) = \pi$ .

## 4.4 Rigidità dei simplettomorfismi

L'obiettivo di questo paragrafo è mostrare che il gruppo dei simplettomorfismi è chiuso nel gruppo di tutti i diffeomorfismi rispetto alla topologia  $C^0$ . Questo è espresso dal seguente teorema che è stato dimostrato indipendentemente da Eliashberg e Gromov negli anni ottanta.

La dimostrazione che si riporta è dovuta a Ekeland e Hofer, eseguita tramite l'utilizzo dell'esistenza di almeno una capacità simplettica.

**Theorem 4.15.** *Il gruppo dei simplettomorfismi di una varietà simplettica  $(M, \omega)$  è chiuso nel gruppo dei diffeomorfismi di  $M$  rispetto alla topologia  $C^0$ .*

Il seguente risultato generalizza il Teorema 1.13 al caso non lineare e rappresenta un tassello importante per la dimostrazione del Teorema 4.15.

**Proposizione 4.16.** *Sia  $\psi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  un diffeomorfismo e  $c$  una capacità simplettica su  $\mathbb{R}^{2n}$ . Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (i)  $\psi$  conserva la capacità degli ellissoidi, cioè  $c(\psi(E), \omega_0) = c(E, \omega_0)$  per ogni ellissoide  $E$  (non necessariamente centrato nell'origine),
- (ii)  $\psi$  è un simplettomorfismo o un anti-simplettomorfismo, cioè  $\psi^*\omega_0 = \pm\omega_0$ .

Per dimostrare la proposizione precedente abbiamo bisogno di un lemma.

**Lemma 4.17.** *Sia  $\psi_j : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  una successione di applicazioni continue che convergono uniformemente su compatti ad un omomorfismo  $\psi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ . Supponiamo che, per ogni  $j$ ,  $\psi_j$  conservi la capacità simplettica di tutti gli ellissoidi. Allora anche  $\psi$  conserva la capacità degli ellissoidi.*

*Dimostrazione.* Senza perdere di generalità possiamo supporre che gli ellissoidi in questione siano centrati nell'origine. Dimostriamo preliminarmente che per ogni ellissoide  $E$  centrato nell'origine e ogni  $\lambda$ ,  $0 < \lambda < 1$  esiste  $j_0$  tale che

$$\psi_j(\lambda E) \subset \psi(E) \subset \psi_j(\lambda^{-1}E), \quad (4.3)$$

per ogni  $j \geq j_0$ . Per fare questo sia  $f_j = \psi^{-1} \circ \psi_j$ . Allora  $\psi_j$  converge all'identità, uniformemente sui compatti. Quindi l'inclusione  $f_j(\lambda E) \subset E$  è ovvia per  $j$  sufficientemente grande. D'altra parte non stiamo assumendo che  $\psi_j$  siano omomorfismi e quindi l'inclusione  $\psi(E) \subset \psi_j(\lambda^{-1}E)$  necessita di una dimostrazione. Per fare ciò, scegliamo  $j_0$  sufficientemente grande tale che per  $j > j_0$  si verifichi che

$$x \in \lambda^{-1}\partial E \quad \Rightarrow \quad f_j(x) \notin E$$

e che l'applicazione  $\phi_j : \lambda^{-1}\partial E \rightarrow S^{2n-1}$  abbia grado 1. Sia ora  $y_0 \in E$  e supponiamo che  $f_j(x) \neq y_0$  per gli  $x \in \lambda^{-1}E$ . Allora l'applicazione  $\phi'_j : \lambda^{-1}\partial E \rightarrow S^{2n-1}$  definita da

$$\phi'_j(x) = \frac{f_j(x) - y_0}{|f_j(x) - y_0|}$$

si estende a  $\lambda^{-1}E$  e quindi ha grado zero. D'altra parte,  $\phi'_j$  è omotopa a  $\phi_j$  e quindi deve avere grado 1. Questa contraddizione implica che  $E \subset f_j(\lambda^{-1}E)$  per  $j \geq j_0$  e questo dimostra le inclusioni (4.3). Queste implicano che

$$\lambda^2 c(E, \omega_0) \leq c(\psi(E), \omega_0) \leq \lambda^{-2} c(E, \omega_0).$$

Siccome  $\lambda < 1$  può essere scelto arbitrariamente vicino a 1 segue che  $\psi$  conserva la capacità degli ellissoidi. □

*Dimostrazione della Proposizione 4.16.* La dimostrazione che (ii) implica la (i) è chiara. Dimostriamo allora la (i) implica la (ii). Se vale la (i) allora le applicazioni

$$\psi_t(z) = \frac{1}{t} \psi(tz)$$

sono diffeomorfismi di  $\mathbb{R}^{2n}$  che conservano le capacità degli ellissoidi e convergono uniformemente sui compatti all'applicazione lineare  $d\psi(0)$ :

$$\Psi z = \lim_{t \rightarrow 0} \psi_t(z).$$

Quindi per il Lemma 4.17,  $\Psi$  conserva la capacità degli ellissoidi. Ma abbiamo visto che la capacità di un ellissoide coincide con il suo spessore lineare simplettico (si veda la Proposizione 4.10). Segue allora dal Teorema 1.13 che  $\Psi^* \omega_0 = \pm \omega_0$ . Lo

stesso vale per  $d\psi(z)$  per ogni  $z \in \mathbb{R}^{2n}$  e per continuità (essendo  $\mathbb{R}^{2n}$  connesso) il segno è indipendente da  $z$ . Questo conclude la dimostrazione della proposizione.  $\square$

*Dimostrazione del Teorema 4.15.* Dal momento che l'enunciato è locale è sufficiente dimostrare il teorema nel caso di  $\mathbb{R}^{2n}$ . Quindi sia  $\psi_j : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  una successione di simplettomorfismi convergente nella topologia  $C^0$  ad un diffeomorfismo  $\psi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ . Per il Lemma 4.17,  $\psi$  conserva la capacità degli ellissoidi e, per la Proposizione 4.16,  $\psi$  è un simplettomorfismo oppure un anti-simplettomorfismo. Vogliamo mostrare che  $\psi^*\omega_0 = -\omega_0$ . Altrimenti la successione  $\phi_j = \psi_j \times id \in \text{Diff}(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n})$  conserverebbe la struttura simplettica  $\omega_0 \times \omega_0$  mentre il suo limite  $C^0$   $\phi = \psi \times id$  soddisfa  $\phi^*\omega = (-\omega_0) \times \omega_0 \neq \pm\omega$  (quando  $n$  è dispari una dimostrazione alternativa può essere ottenuta usando il fatto che  $\psi$  conserva l'orientazione per ottenere  $\psi^*\omega_0 \neq -\omega_0$ ).  $\square$

La Proposizione 4.16 ci permette di definire il concetto di **omeomorfismo simplettico**. Supponiamo che  $n$  sia dispari. Allora diciamo che un omeomorfismo  $h$  di  $\mathbb{R}^{2n}$  che conserva l'orientazione <sup>1</sup> è detto simplettico se esiste una capacità  $c$  di  $\mathbb{R}^{2n}$  tale che per tutti gli ellissoidi sufficientemente piccoli  $E$  si ha  $c(h(E), \omega_0) = c(E, \omega_0)$ . Se invece  $n$  è pari, diremo che  $h$  è simplettico se l'omeomorfismo  $k = h \times id_{\mathbb{R}^{2n}}$  di  $\mathbb{R}^{2n+2}$  conserva l'orientazione e se esiste una capacità simplettica  $c$  di  $\mathbb{R}^{2n}$  tale che per tutti gli ellissoidi sufficientemente piccoli  $E$  si ha  $c(h(E), \omega_0) = c(E, \omega_0)$ . Questa definizione (apparentemente un pò complicata) serve per distinguere i simplettomorfismi dagli anti-simplettomorfismi. Segue dal Lemma 4.17 che il gruppo degli omeomorfismi simplettici è chiuso nel gruppo degli omeomorfismi rispetto alla topologia  $C^0$ . Inoltre ogni omeomorfismo simplettico e liscio è un simplettomorfismo nel senso usuale. Per dimostrare questo distinguiamo il caso pari da quello dispari. Supponiamo prima che  $n$  sia dispari. Allora un omeomorfismo liscio (diffeomorfismo)  $h : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  che preserva

---

<sup>1</sup>La definizione di omeomorfismo che conserva l'orientazione richiede l'uso dell'omologia. Per i nostri scopi è sufficiente sapere che un omeomorfismo liscio (diffeomorfismo)  $h$  di  $\mathbb{R}^{2n}$  preserva l'orientazione se e solo se  $h^*\omega_0^n = \omega_0^n$

l'orientazione deve soddisfare  $h^*\omega_0^n = \omega_0^n$  mentre il fatto che sia simplettico (come omeomorfismo) implica (per definizione) che  $h$  conserva gli ellissoidi per una capacità simplettica  $c$  e dalla Proposizione 4.16 si ha  $h^*\omega_0 = \pm\omega_0$ . D'altra parte  $h^*\omega_0 = -\omega_0$  non si può verificare altrimenti ( $n$  dispari)  $h^*\omega_0^n = -\omega_0^n$  in contrasto con  $h^*\omega_0^n = \omega_0^n$  in quanto  $h$  preserva l'orientazione.

Se invece  $n$  è pari si ottiene il risultato applicando lo stesso ragionamento all'applicazione  $k = h \times id_{\mathbb{R}^{2n}}$  di  $\mathbb{R}^{2n+2}$ .

Usando il teorema di Darboux è possibile definire il concetto di omeomorfismo simplettico su per ogni varietà simplettica.

Concludiamo il paragrafo (e la tesi) con due domande che non hanno avuto a tutto'oggi ancora una risposta.

- se un diffeomorfismo di  $\mathbb{R}^{2n}$  conserva la capacità di ellissoidi piccoli è vero che preserva anche quella degli ellissoidi grandi?
- E' vero che un omeomorfismo simplettico conserva i volumi?





# Bibliografia

- [1] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer Verlag (1989).
- [2] L. Bates and G. Peschke, *A remarkable symplectic structure*, J. Diff. Geom. (1990), 533-538.
- [3] E. Calabi *A construction of nonhomogeneous Einstein metric*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 27, Part II, Amer. Math. Soc, Providence, R. I., 1975, pp. 17-24.
- [4] Y. Eliashberg and N. Mishachev, *Introduction to the h-principle*, Graduate Studies in Mathematics, 48. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [5] M. Gromov, *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. 82 (1985), no. 2, 307-347.
- [6] M. Gromov, *A topological technique for the construction of differential equations and inequalities*, Proc. ICM. 70, Nice, Vol. 2, Gauthier-Villars, Paris (1971), 221-225.
- [7] M. Gromov, *Partial Differential Relations*, Springer-Verlag (1986).
- [8] M. Gromov, *Soft and hard symplectic geometry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), 81-98, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

- [9] D. Joyce, *Compact manifolds with special holonomy*, Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [10] H. Hofer, E. Zehnder, *A new capacity for symplectic manifolds*, in Analysis et cetera (P. Rabinowitz and E. Zehnder, eds.), Academic Press, New York, 1990, pp. 405-429.
- [11] H. Hofer, E. Zehnder, *Symplectic invariants and Hamiltonian Dynamics*, Birkhäuser, Basel 1994.
- [12] C. LeBrun, *Complete Ricci-flat Kähler metrics on  $\mathbb{C}^n$  need not be flat*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 52 (1991), Part 2, 297-304.
- [13] C. LeBrun, *Counter-examples to the generalized positive action conjecture*, Commun. Math. Phys. 118, 591-596 (1988).
- [14] A. Loi, *Introduzione alla Topologia Generale*, Aracne Editrice (2013).
- [15] A. Loi, M. Zedda, *Calabi's inhomogeneous Einstein manifold is globally symplectomorphic to  $\mathbb{R}^{2n}$* , Diff. Geom. and its App. 30 (2012) 145–147.
- [16] A. Loi, R. Mossa, F. Zuddas, *Some remarks on the Gromov width of homogeneous Hodge manifolds*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. Vol. 11, No. 2 (2014).
- [17] A. Loi, F. Zuddas, *Symplectic maps of complex domains into complex space forms*, J. Geom. Phys. 58 (2008), 888-899.
- [18] A. Loi, F. Zuddas, *On the Gromov width of homogeneous Kähler manifolds*, arXiv:1508.02862.
- [19] D. McDuff, *The symplectic structure of Kähler manifolds of non-positive curvature*, J. Diff. Geometry 28 (1988), 467-475.

- [20] D. McDuff, D. Salamon, *J-holomorphic curves and quantum cohomology*, University Lecture Series, 6, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.
- [21] D. McDuff, D. Salamon, *Introduction to symplectic Topology*, 2nd edition, Oxford University Press, Oxford, 1998.
- [22] V. A. Popov, *Closed 2-forms and embedding theorems for arbitrary symplectic manifolds*, Soviet Math. (Iz. VUZ) 32 (1988), no. 4, 60-66.
- [23] S. R. Simanca, *Kähler metrics of constant scalar curvature on bundles over  $CP_{n-1}$* , Math. Ann. 291, 239-246 (1991).
- [24] D. Tischler, *Closed two forms and an embedding theorem for symplectic manifolds*, J. Diff. Geom. 12 (1977), 229-235.