

## Esercizi sulle matrici $\mathbb{R}^n$

Corso di laurea in informatica A.A 2003-2004

Docente : Andrea Loi

Correzione Esercitazione

-1. a) Dire quali sono le dimensioni delle matrici seguenti:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) quali delle matrici precedenti possono essere moltiplicate tra loro?

**Soluzione:**

a) Nominando le matrici si ha A: 2x3, B: 2x2, C: 3x2, D: 3x4, E: 3x3.

b) poiché due matrici possono essere moltiplicate quando il numero delle colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda matrice, possono essere moltiplicate le seguenti:

AC, AD, AE ,BA, CB, CA, EC, ED.

0. Moltiplicare le seguenti matrici quando possibile:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, b) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, c) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
$$d) \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}, e) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, f) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

**Soluzione:**

$$a) \begin{pmatrix} 28 & 14 \\ 79 & 44 \end{pmatrix}$$

b) non possono essere moltiplicate

$$c) \begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 4 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 31 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} -10 & 29 \\ -9 & 24 \end{pmatrix}$$

f) non possono essere moltiplicate.

1. Siano date le matrici  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

- a) Calcolare la terza colonna di AB senza calcolare la matrice AB
- b) Calcolare la seconda riga di AB senza calcolare la matrice AB

**Soluzione:**

- a) la terza colonna di AB si ottiene moltiplicando ciascuna riga di A per la terza colonna di B e si ha  $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$
- b) la seconda riga di AB si ottiene moltiplicando la seconda riga di A per ciascuna colonna di B e si ha  $(6 \ 16 \ 2)$ .

2 Calcolare i seguenti prodotti

$$a) \begin{pmatrix} 7 & 2 & \sqrt{3} & 4 \\ 6 & 8 & a^2 & 2 \\ 3 & \sqrt{5} & a & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b) \begin{pmatrix} 6a & 2 & 3a^2 \\ 4 & 2\sqrt{a} & 2 \\ 5 & 12 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{j}, c) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 6 \\ 3 & 2\sqrt{3} & 4 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{k}.$$

**Soluzione:**

$$a) \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 6a & 2 & 3a^2 \\ 4 & 2\sqrt{a} & 2 \\ 5 & 12 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{a} \\ 12 \end{pmatrix}$$

c) non possono essere moltiplicate perché  $k$  ha dimensione  $3 \times 1$ .

3. Siano A e B due matrici  $n \times n$  e supponiamo che A sia simmetrica.

Quali delle seguenti equazioni è vera è quale è falsa?

$$a) (AB)^T = B^T A, \quad b) (A^T B)^T = B^T A^T$$

$$c) (A^T B)^T = BA, \quad d) (AB)^T = A^T B^T$$

**Soluzione:**

ricordando che  $(AB)^T = B^T A^T$  e che se A è simmetrica  $A^T = A$  si evince che a) e b) sono vere mentre c) e d) sono false.

4. Quali delle seguenti matrici sono diagonali ? simmetriche ? triangolari

? Antisimmetriche ?

$$a) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, b) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^2, c) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & b \end{pmatrix}, d) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2, e) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & a \end{pmatrix}^2,$$

$$f) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & a \end{pmatrix}^3, g) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, h) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, i) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^3,$$

$$l) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2, m) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2, n) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^4$$

**Soluzione:**

Ricordando che una matrice è:

- diagonale se  $a_{ij} = 0$  per  $i \neq j$
- simmetrica se  $a_{ij} = a_{ji}$
- triangolare superiore se  $a_{ij} = 0$  per  $i > j$
- triangolare inferiore se  $a_{ij} = 0$  per  $i < j$
- antisimmetrica se  $a_{ij} = -a_{ji}$

si ha :

a) diagonale simmetrica

$$b) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \text{ diagonale simmetrica}$$

$$c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ab & ab \end{pmatrix} \text{ triangolare inferiore}$$

$$d) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} \text{ diagonale simmetrica}$$

$$e) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a^2 & a^2 \end{pmatrix} \text{ triangolare inferiore}$$

$$f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a^3 & a^3 \end{pmatrix} \text{ triangolare inferiore}$$

$$g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ diagonale simmetrica}$$

h) simmetrica

$$i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ triangolare inferiore}$$

$$l) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ simmetrica}$$

$$\text{m)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{n)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ triangolare inferiore}$$

5. Per quali valori di  $a$  le matrici  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$  commutano?

**Soluzione:**

Si tratta di ricavare i valori di  $a$  per i quali  $AB = BA$ , si ha

$$AB = \begin{pmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+a & a \end{pmatrix}$$

pertanto deve aversi:

$$\begin{cases} 1+a = 1 \\ a = 0 \end{cases}$$

Si ricava quindi che le matrici considerate commutano per  $a = 0$ .

6. Determinare le matrici  $2 \times 2$  che commutano con la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

**Soluzione:**

consideriamo una matrice  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , affinché il prodotto

$AB = \begin{pmatrix} 3c & 3d \\ 3a & 3b \end{pmatrix}$  sia uguale al prodotto  $BA = \begin{pmatrix} 3b & 3a \\ 3d & 3c \end{pmatrix}$  deve aversi  $c = b$  e  $d = a$ , concludiamo che le matrici che commutano con la matrice data sono tutte quelle del tipo  $\begin{pmatrix} k & h \\ h & k \end{pmatrix}$ .

7. Siano  $A \in M_{1,5}$  e  $B \in M_{5,1}$  definite come segue:  $A = (1 \quad -1 \quad 0 \quad \sqrt{2} \quad 1)$ ,

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Calcolare } AB \text{ e } BA.$$

**Soluzione:**

$$AB = -2 + \sqrt{2},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 2\sqrt{2} & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Calcolare il determinante e il rango delle seguenti matrici: a)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

b)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , c)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Soluzione:**

a)  $\det = 2$  pertanto il rango è massimo ossia 3.

b)  $\det = 0$ , il rango non può essere massimo considero il minore

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  il suo determinante vale  $1 \neq 0$  pertanto il rango vale 2.

c)  $\det = 0$  il rango non può essere massimo considero il minore

$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  il suo determinante vale  $-2 \neq 0$  pertanto il rango vale 2.

9. determinare il rango delle seguenti matrici  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ ,  
 $B = (1 \ 0 \ 2)$

**Soluzione:**

$\text{rango}(A) = 2, \text{rango}(B) = 1$ .

10. Qual'è l'inversa delle matrici  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \neq 0, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ?

**Soluzione:**

Ricordando che data la matrice  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  la sua inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \text{ si ha}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a^2} \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

11. Per quali valori del parametro  $\lambda$  le matrici  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  e

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \lambda & 0 & -1 \\ 5 & 4 & h \end{pmatrix} \text{ sono invertibili?}$$

**Soluzione:**

Ricordando che una matrice è invertibile se il suo determinante è diverso da zero, calcoliamo per quali valori di  $\lambda$  il determinante è diverso da zero:  $\det A = -\lambda$  pertanto  $A$  è invertibile per  $\lambda \neq 0$ ;

$\det B = 8\lambda + 4$  pertanto  $B$  è invertibile per  $\lambda \neq -\frac{1}{2}$ .

12. Trovare l'inversa (se possibile) della matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

**Soluzione:**

il determinante di  $A$  è uguale a zero pertanto la matrice non è invertibile.

13. Sia  $S$  l'insieme delle matrici  $n \times n$  simmetriche,  $T$  l'insieme delle matrici triangolari,  $D$  l'insieme delle matrici  $n \times n$  diagonali. Dimostrare che  $S \cap T = D$

**Soluzione:**

$S \cap T$  è costituito da tutte le matrici che risultano sia simmetriche sia triangolari. Pertanto se  $A(a_{ij})$  appartiene a tale insieme deve aversi  $a_{ij} = a_{ji}$  per la simmetria e  $a_{ij} = 0$  per  $i > j$  affinché sia triangolare superiore. poiché devono essere soddisfatte entrambe si ha  $a_{ij} = 0 = a_{ji}$  per  $i \neq j$  ma questa è la condizione che deve essere soddisfatta da una matrice diagonale. (la dimostrazione è stata fatta considerando matrici triangolari superiori, analogo discorso per quelle triangolari inferiori.)

14. Vero o Falso:

1. Se  $A \in M_{n,n}$  ha due righe uguali allora  $\det A = 0$ .
2. Se  $A, B \in M_{n,n}$   $\det(AB) = \det(BA)$ .
3. Se  $A \in M_{n,n}$  e  $k \in \mathbb{R}$ ,  $\det(kA) = k \det A$ .
4. Se  $A \in M_{n,n}$  e  $k \in \mathbb{R}$ ,  $\det(kA) = k^n \det A$ .
5. Se  $A \in M_{n,n}$   $n$  dispari,  $\det(A) = -\det(-A)$ .
6. Se  $A \in M_{n,n}$   $n$  pari,  $\det(A) = \det(-A)$ .

giustificare le risposte.

**Soluzione:**

1. VERO: Ricordando che se una matrice  $B$  è ottenuta scambiando due righe di  $A$  deve aversi  $\det B = -\det A$  se  $A \in M_{n,n}$  ha due

righe uguali allora scambiando le due righe uguali si ha  $\det A = -\det A$  ossia  $\det A = 0$ .

2. VERO: Ricordando che date  $A, B \in M_{n,n}$   $\det(AB) = \det A \det B$  e  $\det A \det B$  sono numeri reali pertanto vale la proprietà commutativa del prodotto si ha  $\det(AB) = \det A \det B = \det B \det A = \det(BA)$ .

3. FALSO : vale la successiva

4. VERO: Se Sia  $B$  la matrice ottenuta moltiplicando la prima riga

di  $A$  per  $k$  ossia  $B = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$  si ha svilup-

pando il determinante rispetto alla prima riga  $\det B = ka_{11}A_{11} + ka_{12}A_{12} + \dots + ka_{n1}A_{n1} = k(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{n1}A_{n1}) = k \det A$ . Sia  $C$  la matrice ottenuta moltiplicando la seconda riga di  $B$  per  $k$  per quanto detto sopra  $\det C = k(\det B) = k(k \det A) = k^2 \det A$ , procedendo in maniera analoga considerando anche le righe successive moltiplicate per  $k$  si ha  $\det(kA) = k^n \det A$ .

5. VERO:  $-A$  è la matrice ottenuta moltiplicando ciascuna riga di  $A$  per  $-1$ , Per la proprietà 4.  $\det(-A) = (-1)^n \det A$ , se  $n$  dispari  $(-1)^n = -1$  si ha  $\det(-A) = -\det(A)$ .

6. VERO:  $-A$  è la matrice ottenuta moltiplicando ciascuna riga di  $A$  per  $-1$ , Per la proprietà 4.  $\det(-A) = (-1)^n \det A$ , se  $n$  pari  $(-1)^n = 1$  si ha  $\det(-A) = \det(A)$ .

15. Sia  $A$  una matrice antisimmetrica  $n \times n$  con  $n$  dispari: dimostrare che  $\det A = 0$ .

**Soluzione:**

Sia  $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$  e  $-A = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ ,

sviluppare il determinante di  $A$  secondo la prima riga equivale a sviluppare il determinante di  $-A$  secondo la prima colonna, pertan-

to  $\det A = \det(-A) = -\det A$  essendo  $n$  dispari; si ricava quindi  $\det A = 0$ .

**16.** Sia  $A$  una matrice ortogonale  $n \times n$  dimostrare che  $\det A = \pm 1$

**Soluzione:**

Per definizione una matrice  $A$  è ortogonale sse  $AA^T = I$  dove con  $I$  si indica la matrice identità; Ricordando che  $\det A = \det(A^T)$  si ha  $\det(AA^T) = \det I$  ossia  $\det A \det(A^T) = \det I$ , si ricava  $(\det A)^2 = 1$  cioè  $\det A = \pm 1$  come volevasi dimostrare.